【おぼえ書き】
Clifford 代数の ungraded/graded 表現とフェルミオンパリティ

Yuto Nakajima (nakaj021@umn.edu)

2026 年 4 月 14 日

1 はじめに

N 個の生成元 $\{\psi_i\}_{i=1,2,\cdots,N}$ が反交換関係

$$\{\psi_i, \psi_j\} = 2\delta_{ij} \quad (\psi_i = \psi_i^\dagger) \tag{1.1}$$

を満たし複素数体上の代数をなすとき、これを **（複素）Clifford 代数**と呼び、Cliff$_{\mathbb{C}}(N)$ と書く。

物理的には、ψ_i はマヨラナフェルミオンの演算子として現れることがある。マヨラナフェルミオンは（標語的には）複素フェルミオンの半分の自由度を持った演算子であり、２つ組み合わせることで複素フェルミオンの自由度を回復する。実際、以下で見るように、Clifford 代数 Cliff$_{\mathbb{C}}(N)$ の表現は、複素フェルミオンのフォック空間の描像を用いて構成することができる。

このようにしてフェルミオン的な自由度を手で導入するとき、物理的にはフェルミオンパリティ $(-1)^F$ が保存されるのが自然である。しかし、「このフェルミオンパリティをどう扱うか？」ということを真面目に考えると、やや微妙な問題がある [Tachikawa]。

以下では、これをおぼえ書きとしてまとめておく。

2 複素フェルミオンのフォック空間とフェルミオンパリティ

はじめに複素フェルミオンのフォック空間から話を始めよう。複素フェルミオンの演算子 $\{c_i\}_{i=1,2,\cdots,N}$ は、反交換関係

$$\{c_i, c_j\} = \{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = 0, \quad \{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij} \tag{2.1}$$

を満たすものとして定義される。$N = 1$ のときには、表現空間として $|0\rangle = [1, 0]^\top$（フェルミオン非占有）と $|1\rangle = [0, 1]^\top$（フェルミオン占有）の 2 状態の張る複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ を用いて、

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

とすれば、このフェルミオン代数の既約表現が作れる[*1]。同様に、

$$\begin{aligned} c_1 &= c \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \\ c_2 &= \sigma_z \otimes c \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \\ &\vdots \\ c_N &= \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \cdots \otimes c \end{aligned} \tag{2.3}$$

のようにすれば、反交換関係を満たす $2^N \times 2^N$ 行列として既約表現が構成できる。このとき、表現空間は

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes N} = \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2 \tag{2.4}$$

*1 簡単のために、以下では抽象的な代数の元とその表現とを同一視した記法を用いる。

である。これはフェルミオンのスロットが N 個ある系で、各スロットの非占有・占有の状態をそれぞれ $|0\rangle = [1,0]^\top, |1\rangle = [0,1]^\top$ として具体的に構成したフォック空間だと思える。

一方、物理的には、励起したフェルミオンの数の偶奇（**フェルミオンパリティ**）が重要になる。奇数（偶数）個のフェルミオンが励起した系では全体の統計性がフェルミオニック（ボゾニック）になり、互いに超選択セクターとして分離されているためである。上のように構成したフェルミオンのフォック空間のもとで、フェルミオンパリティ $(-1)^F$ は

$$(-1)^F = \sigma_z \otimes \cdots \otimes \sigma_z \tag{2.5}$$

で与えられる。$(-1)^F$ はフェルミオン励起の総数を mod 2 で数えるような演算子であり、フェルミオン代数のすべての元と反交換する。

3 偶数次元 Clifford 代数の表現

3.1 ungraded 表現

さて、複素フェルミオンは 2 つのマヨラナフェルミオンとして

$$c_i = \frac{1}{2}(\psi_{2i-1} + i\psi_{2i}) \tag{3.1}$$

のように分解できる。このとき、マヨラナフェルミオンは (1.1) の反交換関係を満たす。

逆に、偶数次元の Clifford 代数 $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ の既約表現は、(3.1) のようにマヨラナフェルミオンを 2 つ組にすることで、n 個の「複素フェルミオン」のフォック空間として $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} = \mathbb{C}^{2^n}$ のように作ることができる[*2]。このとき、生成子は c と $c^\dagger$ の線形結合を取り変えることで

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \sigma_x \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \\
\psi_2 &= \sigma_y \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \\
\psi_3 &= \sigma_z \otimes \sigma_x \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \\
\psi_4 &= \sigma_z \otimes \sigma_y \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \\
&\vdots \\
\psi_{2n-1} &= \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \cdots \otimes \sigma_x \\
\psi_{2n} &= \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \cdots \otimes \sigma_y
\end{aligned} \tag{3.2}$$

と表現される。このような表現を、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ の **ungraded 表現（標準表現）**と呼び、その表現空間を V_{2n} と書く。偶数次元 Clifford 代数 $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ の既約表現は一意であり、すべての既約表現は ungraded 表現に同値であることが知られている。

3.2 「フェルミオン」パリティ

さて、上のように n 個の「複素フェルミオン」系のフォック空間として構成した $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ の ungraded 表現に対して、「フェルミオン」パリティ $(-1)^F$ を定義することを考えよう。$|0\rangle$ と $|1\rangle$ をそれぞれ「フェルミオン」の非占有・占有状態と同定したので、もっとも自然な定義は

$$(-1)^F = \sigma_z \otimes \cdots \otimes \sigma_z \tag{3.3}$$

である。

ただし、この $(-1)^F$ は、Clifford 代数の構造それ自体からアプリオリに決まるのではないということが重要である。$(-1)^F$ は、物理的には「フェルミオン」の総数を mod 2 で数えるような演算子であるが、そもそもこの「フェルミオン」は ψ_i を二つ組にして手で作ったものであり、その作り方には不定性がある。この不定性は、$(-1)^F$ を導入

[*2] 複素フェルミオンの分解を逆にたどってできる複素フェルミオン的な自由度を、物理的なフェルミオン自由度と区別して、以下では「(複素) フェルミオン」のようにかぎかっこ付きで表すことにする。

することによって初めて一つ固定される。言い換えれば、$(-1)^F$ を定義することは、物理的に「何を『フェルミオン』と同定するか？」という付加的な構造を表現空間に導入することに対応する。

したがって、Clifford 代数の具体的な表現に対して $(-1)^F$ を定めることはできるが、$(-1)^F$ は Clifford 代数の抽象的な構造だけからは定義できない。このことは、$(-1)^F$ は Clifford 代数のすべての元と反交換する一方で、このような元が $\{\psi_i\}_{i=1,2,\cdots,N}$ の組み合わせでは作ることができないという事実からも分かる。

3.3 （$\mathbb{Z}_2$-）graded 表現

$(-1)^F$ は具体的な表現に対して定まる不思議な構造に見えるが、物理としてはモチベーションは自然である。特に、以下で見るようにこの「フェルミオン」パリティを含めた表現の同値関係を考えるのが便利である。

まず一般に、$\mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}(N)$ の表現に対して、ユニタリ変換によってそれと同値な表現

$$\tilde{\psi}_i = U\psi_i U^\dagger, \quad |\tilde{a}\rangle = U|a\rangle \quad (a, \tilde{a} \in \{0,1\}) \tag{3.4}$$

を得ることができる。すなわち、表現の同値関係は普通、

$$\rho_1 \sim \rho_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{ユニタリな } U \text{ があって、} \ \rho_1 = U\rho_2 U^\dagger \tag{3.5}$$

と定まっている。

しかし、物理的な要請としては、「フェルミオニック（ボゾニック）」な状態 $|1\rangle$（$|0\rangle$）は、ユニタリ変換したあとでもフェルミオニック（ボゾニック）な状態と同定されていてほしい。すなわち、ユニタリ変換前後の 2 状態 $|a\rangle$ および $|\tilde{a}\rangle = U|a\rangle$ に対して

$$(-1)^F|a\rangle = a|a\rangle \quad \text{ならば} \quad (-1)^F|\tilde{a}\rangle = a|\tilde{a}\rangle \tag{3.6}$$

が成り立つ、$[(-1)^F, U] = 0$ となるようなクラスのユニタリ変換だけを考えると便利である。そこで、$(-1)^F$ についての条件も込めた、新たな同値関係

$$\rho_1 \sim_{\text{graded}} \rho_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{ユニタリな } U \text{ があって、} \ \rho_1 = U\rho_2 U^\dagger \ \text{かつ} \ [(-1)^F, U] = 0 \tag{3.7}$$

を考えることにしよう。このとき、この同値関係によって分類した $\mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ の表現を**（$\mathbb{Z}_2$-）graded 表現**と呼び、ρ_1 と ρ_2 は **graded 同値である**と呼ぶことにする[*3]。

3.4 具体例：$\mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}(2)$

もっとも簡単な具体例として、$\mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}(2) = \{\psi_1, \psi_2\}$ を考える。この代数に対しては、$c = (\psi_1 + i\psi_2)/2$ とすることで複素フェルミオンのフォック空間として既約表現を作ることができる。上で見たように、$V_2 = \mathbb{C}^2 = \mathrm{span}\langle|0\rangle, |1\rangle\rangle$ である。この表現を ρ_1 とする。

そして、この空間に作用する行列として $(-1)^F = \sigma_z$ を定義すると、

$$(-1)^F|0\rangle = +|0\rangle, \quad (-1)^F|1\rangle = -|1\rangle \tag{3.8}$$

となる。

このとき、2 つの既約表現が同値だが graded 同値ではないような例として、$|0\rangle$ と $|1\rangle$ を入れ替えるユニタリ変換

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \tilde{c} \equiv UcU^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad |\tilde{0}\rangle = U|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |\tilde{1}\rangle = U|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \left(U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{3.9}$$

を考えることができる。このようにして得られた $\mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}(2)$ の新たな表現（ρ_2 とする）は、Clifford 代数の反交換関係を保っているので（ungraded 表現として）ρ_1 と同値であり、$\mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}(2)$ の唯一の既約表現である。

[*3] 「ungraded 表現」と「graded 表現」は通常の用語法だが、「graded 同値」は便宜的に導入した本ノートだけの用語法である。通常は、「graded 表現として同値」のような言い方をする。

一方、U は $(-1)^F$ と交換しないので、ρ_1 と ρ_2 は graded 同値でない。

$$\rho_1 \sim \rho_2, \quad \rho_1 \nsim_{\text{graded}} \rho_2 \tag{3.10}$$

すなわち、ρ_2 は $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2)$ のもうひとつの graded 表現である。実際、各基底の「フェルミオン」パリティが

$$(-1)^F \left|\tilde{0}\right\rangle = -\left|\tilde{0}\right\rangle, \quad (-1)^F \left|\tilde{1}\right\rangle = +\left|\tilde{1}\right\rangle \tag{3.11}$$

のように (3.8) とは異なっている。したがって、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2)$ の既約表現は ungraded 表現としては一意だが、graded 表現としては２通りある。

ρ_1 と ρ_2 は、いずれも $\mathbb{C}^2$ を表現空間に持ち、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2)$ のすべての生成子が（適切な基底のもとで）まったく同じ行列に写像されるが、「$\mathbb{C}^2$ の２つの基底のうちどちらを『フェルミオン』占有状態とみなすか（すなわち、どちらが『フェルミオン』パリティ -1 を持つか)」という点だけが異なっている。このように、$(-1)^F$ を代数の構造の一部とみなし、$(-1)^F$ が保たれるという条件を表現の同値関係に追加で課したものが graded 表現である。一般に、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ は２つの異なる graded 表現をもつ。

3.5 カイラリティ演算子

$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ の graded 表現を指定するには、ungraded 表現の状態 $|\phi\rangle \in V_{2n} = \mathbb{C}^{2^n}$ を任意に一つ固定し、その $(-1)^F$ 固有値を $+1$ と指定すれば必要十分である。なぜなら、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ の元と $(-1)^F$ の反交換関係より、$|\phi\rangle$ に偶数個（奇数個）の ψ_i が作用した状態は $(-1)^F$ 固有値 $+1$（-1）を持つことになるためである。これにより、$|\phi\rangle$ に $\psi_i \in \mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ を作用して得られるすべての状態の $(-1)^F$ 固有値が指定され、各状態の $(-1)^F$ 固有値を保つようなユニタリ変換がこれと graded 同値な graded 表現を与える。逆に、各状態の $(-1)^F$ 固有値をすべて反転したものが、もう一方の graded 表現である。

この状態 $|\phi\rangle$ として、ψ_i を順にペアにして $c_i = (\psi_{2i-1} + i\psi_{2i})/2$ として作った「フェルミオン」の真空

$$c_i |\phi\rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.12}$$

を選ぶことにする。このとき、状態 $|\phi\rangle$ の $(-1)^F$ 固有値を選ぶことで２つの graded 表現

$$\rho = \begin{cases} \rho_1 & \text{if} \quad (-1)^F |\phi\rangle = +|\phi\rangle \\ \rho_2 & \text{if} \quad (-1)^F |\phi\rangle = -|\phi\rangle \end{cases} \qquad (\rho_1 \nsim_{\text{graded}} \rho_2) \tag{3.13}$$

を指定できる。上で述べた通り、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ の既約表現は ρ_1 か ρ_2 のいずれかに graded 同値である。

一方、実用上はもう少し便利な方法がある。まず、演算子

$$\Psi \equiv (-1)^F \prod_{i=1}^{n} (2c_i^\dagger c_i - 1) \tag{3.14}$$

を考えることにすると、これは各 graded 表現のすべての状態に対して

$$\Psi |\psi_\rho\rangle = \begin{cases} +(-1)^n |\psi_\rho\rangle & \text{if} \quad \rho \sim_{\text{graded}} \rho_1 \\ -(-1)^n |\psi_\rho\rangle & \text{if} \quad \rho \sim_{\text{graded}} \rho_2 \end{cases} \tag{3.15}$$

のように同一の固有値を持つ。このことは、以下のようにして分かる。上では、「フェルミオン」の真空 $|\phi\rangle$ を基準に取り、その $(-1)^F$ 固有値を $+1$（-1）と定めることで ρ_1（ρ_2）を得た。したがって、$|\phi\rangle$ は Ψ 固有値 $+(-1)^n$（$-(-1)^n$）を持っている。この状態 $|\phi\rangle$ に「フェルミオン」の演算子 $c_i^\dagger$ を作用させると、$(-1)^F$ の符号と $2c_i^\dagger c_i - 1$ の符号がともに反転するので、Ψ 固有値は不変である。同様に、$c_i^\dagger$ を何度作用させても Ψ 固有値全体は不変なままであることが分かる。実際、Ψ はすべての $\psi_i \in \mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ と交換するので、表現空間全体を Ψ の固有空間に取ることができる。したがって、表現空間のすべての状態に対して Ψ は同一の固有値を持ち、２つの graded 表現は Ψ の符号で分類できる。

また、以下のように「複素フェルミオン」を作る過程を経由しない構成もできる。

$$2c_i^\dagger c_i - 1 = i\psi_{2i-1}\psi_{2i} \tag{3.16}$$

であることを用いると、Ψ は全体にかかる i^n の符号を除いて

$$\Gamma \equiv (-1)^F \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_{2n} \tag{3.17}$$

と書き換えることができ、同様に Γ の符号で 2 つの graded 表現を分類できる。この Γ を**カイラリティ演算子**と呼ぶ、これは、ローレンツ群のスピノル表現を構成するときに登場する γ^5 を一般化したものである。

Ψ と同様に、Γ はすべての $\psi_i \in \mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ および $(-1)^F$ と交換するので、graded 表現をその固有値で分類することができる。$\Gamma^2 = (-1)^n$ なので、Γ 固有値は n が偶数（奇数）のとき、± 1（$\pm i$）である。そこで、n に応じて Γ の固有値が $+1$ および $+i$（-1 および $-i$）であるような graded 表現の表現空間を $V_{2n}^{\mathbb{Z}_2,+}$（$V_{2n}^{\mathbb{Z}_2,-}$）とすると、

$$V_{2n} = V_{2n}^{\mathbb{Z}_2,+} = V_{2n}^{\mathbb{Z}_2,-} = \mathbb{C}^{2^n} \tag{3.18}$$

である。それぞれ表現空間は同じだが、「フェルミオン」パリティが物理的に重要になるような場合では、いずれの graded 表現を選ぶか固定しなくてはならない。

4　奇数次元 Clifford 代数の表現

次に、奇数次元 Clifford 代数 $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n-1)$ の表現を考える。

4.1　Clifford 代数の次元上げ

初めに、graded 表現と ungraded 表現の関係は、異なる次元の Clifford 代数を結びつけることを指摘しておこう。

N 次元 Clifford 代数 $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(N)$ に対して、graded 表現は $(-1)^F$ の作用も含めて同値関係 (3.7) を取った表現であった。このとき、$(-1)^F$ がすべての $\psi_i \in \mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(N)$ と交換することから、$\psi_0 = (-1)^F$ とすると、これは 1 次元高い $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(N+1) = \{\psi_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$ の代数を定める。

したがって、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(N) = \{\psi_i\}_{i=1,2,\cdots,N}$ の graded 同値関係は、ψ_0 も含めた $(N+1)$ 次元の代数 $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(N+1) = \{\psi_i\}_{i=0,1,\cdots,N}$ の（ungraded な）同値関係と見ることができる。標語的に言えば、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(N)$ の graded 表現は $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(N+1)$ の ungraded 表現である。

$\{\psi_i\}_{i=0,1,\cdots,N}$ を $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(N)$ の graded 表現と見ると、graded 同値な表現は

$$\tilde{\psi}_i = U\psi_i U^\dagger \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \quad \tilde{\psi}_0 = U\psi_0 U^\dagger = \psi_0 \tag{4.1}$$

という形で表される表現である。一方、これを $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(N+1)$ の ungraded 表現と見ると、同値な表現は

$$\tilde{\psi}_i = V\psi_i V^\dagger \quad (i = 0, 1, \ldots, N) \tag{4.2}$$

という形で表される表現である。一見、(4.2) は (4.1) よりも大きなクラスのユニタリ変換を許しているように見えるが、2 つの同値関係は同等である。なぜなら、graded 同値関係は ψ_0 の具体的な選び方に依存しており、ψ_0 を一つ固定して初めて意味を持つからである。

$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(N+1)$ の ungraded 表現は、その同値類の中で $\psi_0 = \sigma_z \otimes \cdots \otimes \sigma_z$ となるような代表元をいつでも取ることができ、このような代表元同士で比較するのが $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(N)$ の graded 同値関係である。物理らしい言い方をするなら、(4.2) のゲージ自由度が許される中で、ψ_0 を固定するゲージ固定条件を課したのが (4.1) であると言い換えてもよい。

4.2　graded 表現

さて、前節の内容を踏まえて、まず奇数次元 Clifford 代数 $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n-1)$ の graded 表現を考えよう。$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n-1)$ の graded 表現は $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ の ungraded 表現として与えられるので、これは一意で、表現空間を $V_{2n-1}^{\mathbb{Z}_2}$ とすると

$$V_{2n-1}^{\mathbb{Z}_2} = V_{2n} = \mathbb{C}^{2^n} \tag{4.3}$$

が成り立つ。

具体的には、(3.2) の ψ_1 から ψ_{2n-1} までの表式を取り（ψ_{2n} の作用を忘れ)、これに

$$\psi_0 = (-1)^F = \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \cdots \otimes \sigma_z \tag{4.4}$$

をあわせることで、$\mathbb{C}^{2^n}$ を表現空間とする $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n-1)$ の graded 表現が構成できる。$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n-1)$ の graded 表現はこの graded 表現に graded 同値で、また、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ の ungraded 表現にも同値である。実際、ユニタリ変換

$$U = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \exp\left[\frac{i\pi}{4}\frac{\sigma_x}{2}\right] \tag{4.5}$$

のもとで $\psi_0 \mapsto U\psi_0 U^\dagger = \psi_{2n}$ となるので、これは $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ の ungraded 表現に同値であることが分かる。

4.3 ungraded 表現

次に、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n-1)$ の ungraded 表現を考える。ungraded 表現は偶数次元の Clifford 代数に対しては既約だったが、以下で見るように、奇数次元の Clifford 代数に対しては既約でない。これは、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n-2)$ の graded 表現が 2 つ存在することの現れである。

具体的には、(3.2) の ψ_1 から ψ_{2n-1} までの表式を取ることで、$\mathbb{C}^{2^n}$ を表現空間とする表現が構成できる。逆に言えば、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n-1)$ の ungraded 表現は、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ の graded 表現から $(-1)^F$ と ψ_{2n} の作用を忘れることで得られる。しかし、忘れた 2 つの生成子の積 $(-1)^F\psi_{2n}$ は $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n-1)$ のすべての生成子と交換するので、$(-1)^F\psi_{2n}$ の固有値 $\pm i$ で表現空間を固有分解することができる。すなわち、$(-1)^F\psi_{2n}$ 固有値 $+i$（$-i$）をもつ固有空間を $V^{\pm}_{2n-1}$ とすると、

$$V_{2n-1} = V^{+}_{2n-1} \oplus V^{-}_{2n-1} \tag{4.6}$$

のように直和分解できる。このとき、それぞれの既約表現の固有空間は $\mathbb{C}^{2^{n-1}}$ になっている。

したがって、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$ の表現から上のように作れる $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n-1)$ の ungraded 表現は可約であり、2 つの既約表現に分解できる。これらは相異なる $(-1)^F\psi_{2n}$ 固有値を持ち、表現空間として

$$V^{+}_{2n-1} = V^{\mathbb{Z}_2,+}_{2n-2}, \quad V^{-}_{2n-1} = V^{\mathbb{Z}_2,-}_{2n-2} \tag{4.7}$$

が成り立つ。

あるいは、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n-1)$ には互いに反交換する $(2n-1)$ 個の生成子があることから、そのうち一つの生成子を $(-1)^F$ とみなし、$\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n-2)$ の graded 表現として直接構成することもできる。この場合、前章の議論と同様に、$\Gamma = (-1)^F\psi_1\cdots\psi_{2n-2}$ 固有値が異なる 2 通りの既約表現が得られる。

5 まとめ

以上の議論をまとめると、以下のようになる。Clifford 代数 $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(N)$ の既約表現は、次元の偶奇によって構造が入れ替える周期性があることが読み取れる。

	ungraded 表現 （フェルミオンパリティを考慮しない表現）	graded 表現 （フェルミオンパリティを考慮した表現）
偶数次元 $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n)$	一意（2^n 次元）	Γ の固有値によって 2 通り（2^n 次元）
奇数次元 $\mathsf{Cliff}_{\mathbb{C}}(2n-1)$	Γ の固有値によって 2 通り（2^n 次元）	一意（2^n 次元）

参考文献

Y. Tachikawa, *Algebraic topology for physicists*. [Online]. Available: https://member.ipmu.jp/yuji.tachikawa/lectures/2024-mathphys/notes.pdf