3 次元場の理論の双対性と物性理論への応用

中島悠翔（nakaj021@umn.edu）

2025 年 11 月 27 日

本ノートでは、互いに双対な理論を系統的に導出する方法である双対性の網（Duality Web）を、特に 3 次元場の理論に限定してレビューする。これは空間 2 次元の強相関電子系を記述する場の理論において特に重要であり、強相関系をそれと双対な弱相関系に写像することによって摂動的な解析を行うことなどができる。また、特に相対論的・非相対論的な分数量子ホール系を中心とした物理的応用にも触れる。

定義および記法

- 3 次元ミンコフスキー計量：$\eta = \mathrm{diag}(-,+,+)$
- 3 次元ガンマ行列：$\gamma_0 = i\sigma_2, \gamma_1 = \sigma_1, \gamma_2 = \sigma_2$
- ゲージ場の記法
  - $A, B, C, \cdots$ のように大文字で書いたときは背景ゲージ場（外場）、$a, b, c, \cdots$ のように小文字で書いたときにはダイナミカルなゲージ場を表す。また、特に、A, a は Spin_C 接続、それ以外のアルファベット（ $B, C, \cdots; b, c, \cdots$ ）は通常のゲージ場を表すと約束する。すなわち、これらのゲージ場は $w_2 \in H^2(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$ を 2 次スティーフェル・ホイットニー類として、
$$\int \frac{\mathrm{d}b}{2\pi} \in \mathbb{Z}, \quad \int \frac{\mathrm{d}a}{2\pi} = \int \frac{w_2}{2} \tag{0.0.1}$$
の量子化条件を満たす。
  - D_A, D_a のように書いたときには、いずれもゲージ場ないし Spin_C 接続の共変微分
$$D_A = \mathrm{d} - iA \tag{0.0.2}$$
を表すことにする。D_{-A+2b} のように、この下付き文字は電荷まで込めた結合を表す。
- チャーン・サイモンズ項のレベルの記法
  - 以下のように定義する。また、$\mathrm{U}(N)_{k,k}$ を単に $\mathrm{U}(N)_k$ と書く。
$$\mathrm{U}(N)_{k,k'} \simeq \frac{\mathrm{SU}(N)_k \times \mathrm{U}(1)_{Nk'}}{\mathbb{Z}_N} \tag{0.0.3}$$
- その他の記法
  - 特に断りのない限り、$\phi, \Phi, \cdots$ は複素スカラー場、$\psi, \Psi, \chi, \cdots$ は 2 成分スピノルを表す。

目次

第 1 章

はじめに

1.1　強い双対性と弱い双対性

2 つの理論が等価な物理を記述するとき、これらの理論は**双対である**という。しかし、精密な議論のためには「等価」の意味するところを正確に定義する必要がある。

一つの可能な定義は、2 つの理論が同じスケーリング則にしたがう局所演算子をともにもち、かつ相等しい大域的対称性をもつことである。このとき、この関係を**弱い双対性**とよぶ。以下で見るボゾンの粒子・渦糸双対は弱い双対性の代表例である。例えば、電磁気的な $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{EM}}$ 対称性の電荷をもつ演算子 ϕ は、もう一方の理論では創発した U(1) ゲージ場 a のモノポール $\mathcal{M}_a$ に対応する。また、両者の理論はともに $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{EM}}$ の大域的対称性をもつ。このように、双対性の両側で局所演算子と大域的対称性の対応がある。

一方、2 つの理論が赤外領域で同じ CFT（共形場理論）に流れるとき、これを**強い双対性**とよぶ。ボゾンの粒子・渦糸双対の例でいえば、パラメータを 2 次相転移点に調節することでいずれの理論も CFT に流すことができる。逆に、もし同じ CFT に流れた 2 つの理論が手元にあれば、それぞれにレレバントな摂動項を加えることで、同じ相の異なる記述を手にすることができる。

強い双対性は弱い双対性だが、逆は必ずしも正しくない。例えば、ボゾンの粒子・渦糸双対は、厳密に弱い双対性であるが、強い双対性であるかどうかは数値計算による予想の域を出ておらず未解決である。本ノートで扱う双対性は、（ラージ N ゲージ理論を除いて）もっぱら弱い双対性である。

1.2　ラグランジアンの $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 変換

3 次元場の理論の双対性を代数的に扱うため、理論に対する変換を 2 つ定義する。

まず、外場 B と結合した CFT$\mathcal{L}_1[B]$ に対し、***S* 変換**を次の操作で定義する。

$$S:\mathcal{L}_1[B]\longmapsto\mathcal{L}_2[B]=\mathcal{L}_1[b]+\frac{1}{2\pi}b\wedge dB \tag{1.2.1}$$

ここで、小文字のアルファベットはダイナミカルなゲージ場を表すという約束だったことに注意せよ。すなわち、この変換は、すでに結合している背景ゲージ場をダイナミカルに変えて、代わりにこのダイナミカルなゲージ場と背景ゲージ場の BF 項を導入するのが S 変換である。この操作を 2 回繰り返すと、

$$\mathcal{L}_1[B]\longmapsto\mathcal{L}_1[b]+\frac{1}{2\pi}b\wedge\mathrm{d}B\longmapsto\mathcal{L}_1[b]+\frac{1}{2\pi}b\wedge\mathrm{d}c+\frac{1}{2\pi}c\wedge\mathrm{d}B \tag{1.2.2}$$

となる。最後の式で c を積分すると拘束条件 $b+B=0$ が得られるので、これを再び代入すると結局

$$\mathcal{L}_1[B]\overset{S^2}{\longmapsto}\mathcal{L}_1[-B] \tag{1.2.3}$$

が得られ、ゲージ場の符号を除いてもとの理論に復することが分かった。この関係を標語的に

$$S^2=\mathcal{C} \tag{1.2.4}$$

と書くことにする。ただし、$\mathcal{C}$ は荷電共役変換、すなわちゲージ場の符号の反転を表している。

次に、***T* 変換**を次の操作で定義する。

$$T : \mathcal{L}_1[B] \longmapsto \mathcal{L}_1[B] + \frac{1}{4\pi} B \wedge \mathrm{d}B \tag{1.2.5}$$

すなわち、背景ゲージ場のチャーン・サイモンズ項のレベルを 1 上昇させる変換である[*1]。

面白いことに、S, T は生成元として $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ の群構造をなすことが知られている。具体的には、2 つの生成元

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.6}$$

と対応させることができる。これらは基本的な関係式 $S^2 = -1, (ST)^3 = 1$ を満たし、任意の元 φ は

$$\varphi = T^{n_1} S T^{n_2} S \cdots S T^{n_k} \tag{1.2.7}$$

と書くことができる。この $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 変換は、3 次元場の理論の双対性を考えるうえで基本的な道具立てとなる。S 変換、T 変換がこの群の生成元をなすことから、この変換全体を考えるには生成元となっている 2 つの変換だけを考えればよい。

第 2 章

準備：ボソンおよびフェルミオンの理論

2.1 粒子・渦糸双対性

強相関ボゾン系のもっとも基本的な格子模型として、（ボゾンの）Hubberd 模型

$$H = -t \sum_{\langle i,j|i,j\rangle} b_i^\dagger b_j + h.c. + U \sum_i n_i(n_i - 1) \tag{2.1.1}$$

を考える。第 1 項は最近接ホッピング項、最終項はボゾンのハードコア相互作用である。よく知られているように、この模型は $U/t \ll 1$ の領域では U(1) 対称性が自発的に破れて超流動相となり、$U/t \gg 1$ の領域では Mott 絶縁体相となる。この量子相転移は、相転移点近傍で質量項をもつ複素スカラー場の理論

$$\mathcal{L}_B = |D_A\phi|^2 - r^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4 \tag{2.1.2}$$

によって記述することができ、それぞれの相はこのスカラー場が凝縮している相と凝縮していない相に対応する。量子臨界点は Wilson-Fisher 固定点によって記述され、以下ではこの固定点上のスカラー場の理論を形式的に

$$\mathcal{L}_{WF} = |D_A\phi|^2 - |\phi|^4 \tag{2.1.3}$$

と書くことにする。質量項 $-r^2|\phi|^2$ はこの固定点まわりのレレバントな摂動であって、$r^2 > 0$ のとき $\langle\phi\rangle = 0$ の Mott 絶縁体相、$r^2 < 0$ のとき $\langle\phi\rangle \neq 0$ の超流動相に対応する。

スカラー場が凝縮した超流動相（$\phi = (v/\sqrt{2})e^{-i\theta}$）では、南部・ゴールドストーンボゾンとしてコンパクトなボゾン θ が現れ、このボゾンについての渦糸を考えることができる。この渦糸は有限のエネルギーを持つ励起で、擬似的に空間 2 次元の系の粒子として扱うことができる。実際、この渦糸同士はクーロン相互作用と同じべき則の相互作用をすることが分かる。

$\xi = (1/2\pi)\mathrm{d}b \equiv (1/2\pi)f$ の形で書けるので、結局もとのラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{WF} = -\frac{1}{8\pi^2 v^2} f \wedge \star f + b \wedge \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{sing}}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} b \wedge \mathrm{d}A \tag{2.1.5}$$

と書ける。第 1 項のマクスウェル項は Mott 絶縁体相の低エネルギー側ではイレレバントなので、以下では無視する。第 2 項について、θ の周期性から $\int \mathrm{d}(\mathrm{d}\theta_{\mathrm{sing}}/2\pi) \in \mathbb{Z}$ となるが、整数値に値を取るこの積分はある 2 次元曲面をつらぬく渦糸の本数を与えていると考えることができる。より物理的には、時間成分 $(\mathrm{d}\mathrm{d}\theta_{\mathrm{sing}})^0 = \nabla \times (\nabla\theta_{\mathrm{sing}})$ に着目すると、空間方向の周回積分が領域内の渦糸の数密度を与える、と言い換えてよい。そこで、渦糸を新たな物質場 Φ としてそのカレントを $j_\Phi = \mathrm{d}\mathrm{d}\theta_{\mathrm{sing}}/2\pi$ とすると、

$$\tilde{\mathcal{L}}_{WF} = b \wedge j_\Phi + \frac{1}{2\pi} b \wedge \mathrm{d}A \tag{2.1.6}$$

と書き換えられる。カレント j_Φ を Wilson-Fisher 固定点にあるダイナミカルな物質場を用いてあらわに書くと、

$$\tilde{\mathcal{L}}_{WF} = |D_b\Phi|^2 - |\Phi|^4 + \frac{1}{2\pi} b \wedge \mathrm{d}A \tag{2.1.7}$$

という、元のラグランジアン (2.1.3) と BF 項の分だけ異なったラグランジアンが得られる*1。これら 2 つのラグランジアンは、異なる物理的描像によって同じ固定点を記述している。すなわち、ラグランジアン (2.1.3) は電磁気的な U(1) 対称性についての（以下、「EM の」とよぶ）電荷をもったボゾンの描像である一方で、ラグランジアン (2.1.7) は渦糸の描像を基本とし、渦糸がその電荷を運ぶ創発したゲージ場が代わりに BF 項を通じて外場と結合している。

2.2　弱い双対性としての局所演算子の対応

以上の議論を通じて 1 つ目の双対

$$|D_A\phi|^2 - |\phi|^4 \longleftrightarrow |D_b\Phi| - |\Phi^4| + \frac{1}{2\pi} b\mathrm{d}A \tag{2.2.1}$$

が得られた。これは**粒子・渦糸双対**にほかならない。Wilson-Fisher 固定点にあるボゾンの理論を [WF] と書くことにすると、この双対性は

$$[\mathrm{WF}] = S[\mathrm{WF}] \tag{2.2.2}$$

と書ける。このように書いたとき、等号で結んではいるが、あくまでも双対性の意味であることに注意せよ。すなわち、この等号は両辺でダイナミカルな物質場が同じ役割を果たしていることを意味しない。

一方、双対性の両辺で局所演算子の対応を考えることはできる。まず、左辺の CFT に対するレレバントな摂動項である $|\phi|^2$ は、右辺では符号を変えて $-|\Phi|^2$ に対応する。実際、左辺にこの摂動を**正**の微小係数を伴なって加えると、U(1) 対称性が自発的に破れて $\langle\phi\rangle \neq 0$ の超流動相が実現し、外場の質量項が現れる。クーロン相互作用は EM 電荷に遮蔽されて短距離で減衰し、磁束の侵入が許されなくなる。一方、対応する摂動を右辺に加えると、$\langle\Phi\rangle = 0$ の相が実現し、物質場がギャップをもつ代わりにゲージ場 b のゆらぎが大きくなる。その結果、ラグランジアンは $(1/2\pi)b\mathrm{d}A$ となり、b が未定乗数となって鞍点解 $\mathrm{d}A = 0$（より正確には磁束の量子化 $\int(\mathrm{d}A/2\pi) \in \mathbb{Z}$）を与えるが、これは磁束の侵入が禁止されるマイスナー効果にほかならない。

逆に、左辺にこの摂動を**負**の微小係数を伴なって加えると、今度は $\langle\phi\rangle = 0$ の相が実現し、物質場がギャップをもって自明な絶縁体相が実現する（あるいは、ゲージ場のゆらぎが大きくなって電荷の閉じ込めが起こる）。一方、右辺では渦糸が凝縮して $\langle\Phi\rangle \neq 0$ となるため、ゲージ場 b が質量を獲得してギャップドになる。その結果、ゲージ場のゆらぎは低エネルギーで抑制され、これも自明な絶縁体相を与える。いずれの場合も、加えた摂動項に応じて等価な相が実現することが分かる。

また、左辺での EM 電荷 ϕ は、右辺ではモノポール $\mathcal{M}_b$ に対応する。これは、右辺で EM 電荷を運ぶのが $J_{\mathrm{EM}} = \partial\mathcal{L}_{WF}/\partial A = \mathrm{d}b/2\pi$ であることからしたがう。

---

*1 以下では、ウェッジ積の記号を省略した記法を用いる。例えば、$b \wedge \mathrm{d}A$ を単に $b\mathrm{d}A$ などと書く。

以上より、スケーリング次元の対応が分かって、

$$\Delta[|\phi|^2] = \Delta[|\Phi|^2], \quad \Delta[\phi] = \Delta[\mathcal{M}_b] \tag{2.2.3}$$

が得られる。このように、理論の間に弱い双対性があるとき、局所演算子の対応を考えることができる。

2.3 ボゾンの時間反転対称性

時間反転変換（$t \mapsto -t$ および複素共役）のもとで、ゲージ場は

$$\mathcal{T} : A_i \mapsto -A_i \tag{2.3.1}$$

と変換する。したがって、Wilson-Fisher 固定点にあるボゾンは時間反転で不変である。これを形式的に

$$\mathcal{T}[\mathrm{WF}] = [\mathrm{WF}] \tag{2.3.2}$$

と書く。

2.4 Massless Dirac フェルミオンの正則化

続いて、境界のない 3 次元多様体 $\mathcal{M}$ 上で massless Dirac フェルミオン

$$\mathcal{L}_D[A] = \bar{\psi} i \not{D}_A \psi \tag{2.4.1}$$

を「正しく」定義することを考える[*2]。（ナイーブな）分配関数 $Z = \det \not{D}_A$ は発散するので、意味を持たせるためにはなんらかの正則化が必要である。よく知られているように、この発散は、時間反転対称性を保ったまま正則化することはできない（**パリティ・アノマリー**）。以下では、この問題をうまく回避してパリティ・アノマリーをあらわに捕捉しつつ、実用上困らない範囲で Dirac フェルミオンを正則化する方法を紹介する。

よく使われる便利な正則化スキームの一つは、重いフェルミオンを使う方法である。すなわち、無限に重い質量 $M(< 0)$ をもったフェルミオン

$$\mathcal{L}_H = \bar{\psi}(i\not{D}_A + M)\psi \tag{2.4.2}$$

を理論に付け加え、UV での発散を回避する方法である。この正則化フェルミオンの存在により、全体の分配関数は

$$Z_\psi[A] = \det \not{D}_A \cdot \det(\not{D}_A - iM) = |Z_\psi| e^{-i\pi\eta[A,g]/2} \tag{2.4.3}$$

と与えられる。Dirac 演算子 $\not{D}_A$ の固有値の符号の総和 $\eta[A, g] = \sum_i \mathrm{sgn}(\lambda_i)$ は **η-不変量**と呼ばれる。一般に、時間反転変換で分配関数が複素共役 $Z \mapsto Z^*$ と変換されることから、（予想されたように）正則化されたこの分配関数は時間反転に対して不変でない。

しかし、もとの 3 次元場の理論を 1 次元高い 4 次元場の理論のバウンダリにおくことで、時間反転対称性を保ちながら正則化できることがある。実際、Dirac フェルミオンを 1 次元高いトポロジカル絶縁体のバウンダリにおくと、バルクの分配関数と合わせて実になり、時間反転不変にできる。このように時間反転不変にした分配関数は、3 次元の中で閉じていないので 3 次元多様体の上のラグランジアンとして書くことはできない。しかし、η-不変量とバルクの理論からの寄与は合わせて整数値の Atiyah-Patodi-Singer 指数に値を取ることが知られていて（**Atiyah-Patodi-Singer**

[*2] 一般に、多様体の 2 次スティーフェル・ホイットニー類 w_2 が自明であって、特定のスピン構造が選ばれているとき、この多様体とスピン構造の 2 つ組を**スピン多様体**と呼ぶ（あるいは単に、「多様体がスピンである」という）。ここでは、多様体 $\mathcal{M}$ がスピンであることは仮定しない。一般に、任意の 3 次元以下の向き付け可能多様体にはスピン構造が入ることが知られている（4 次元では、たとえば複素射影空間 $\mathbb{C}P_2$ はスピン構造が入らない例である）が、スピン構造が入るような多様体に対しても、スピン構造の取り方に依存しないように議論を進めることができる。具体的な実現としては、「フェルミオニックな自由度には必ず Spin_C 接続が結合する」と約束することにより可能になる。例えば、式 (2.4.1) で、Dirac フェルミオンと結合した A は Spin_C 接続である。物理的には、これは電子系における**統計・電荷対応**（偶数電荷をもつ励起はボソン、奇数電荷をもつ励起はフェルミオンとする対応）を場の理論の範疇でコンシステントに扱う方法であるといえる。これによって、電荷をもたないフェルミオニックな励起は自動的に禁止される。

の指数定理）、この関係から、η-不変量はレベル $-1/2$ の U(1) チャーン・サイモンズ項によって近似できる。すなわち、正則化フェルミオンを含めたバウンダリでのラグランジアンは、上の意味において

$$\mathcal{L}_D + \mathcal{L}_H \simeq \mathcal{L}_D - \frac{1}{8\pi} A\mathrm{d}A - \mathrm{CS}_g \tag{2.4.4}$$

と書ける[*3]。このラグランジアンはバウンダリの理論だけに着目しているので、依然として時間反転不変ではないが、チャーン・サイモンズ項を含んだ扱いやすい形になっている。

この表記は厳密には正しくないが、物理に限った文脈で 3 次元チャーン・サイモンズ項を扱う際には幅広く用いられている約束であり、Dirac フェルミオンのパリティ・アノマリーを捕捉するのに便利である。本ノートではこれ以降、η-不変量はレベル $-1/2$ チャーン・サイモンズ項によって近似されていると約束し、このチャーン・サイモンズ項を省略する。すなわち、式 (2.4.4) を単に $\mathcal{L}_D$ と書くことにする。**Dirac フェルミオンがラグランジアンに現れたときには、いつでもレベル $-1/2$ チャーン・サイモンズ項が同伴している（ただし、省略する）ことに注意せよ。**

2.5　フェルミオンの時間反転対称性

次に、時間反転変換に対する変換性を考える。時間反転変換（$t \mapsto -t$ と複素共役変換）のもとで場は

$$\mathcal{T} : \psi \mapsto i\sigma_2\psi, \quad \bar{\psi} \mapsto \bar{\psi} i\sigma_2, \quad A_i \mapsto -A_i \tag{2.5.1}$$

と変換される。このもとで、Dirac フェルミオンの運動項は時間反転不変であるが、チャーン・サイモンズ項はその符号を変える。したがって、（隠れたレベル $-1/2$ チャーンサイモンズ項に注意すると）Dirac フェルミオン (2.4.1) は

$$\mathcal{T} : \bar{\psi} i\not{D}_A \psi \mapsto \bar{\psi} i\not{D}_A \psi + \frac{1}{4\pi} A\mathrm{d}A + 2\mathrm{CS}_g \tag{2.5.2}$$

と変換する。この理論はたしかに時間反転変換に対して不変になっておらず、パリティ・アノマリーの現れが確認できる。

Massless Dirac フェルミオンを [D] と書くことにすると、時間反転変換でチャーン・サイモンズ項のレベルが 1 上昇しているので、これを形式的に

$$\mathcal{T}[\mathrm{D}] = T[\mathrm{D}] \tag{2.5.3}$$

と書く。

第一義的にはこのレベル $-1/2$ チャーンサイモンズ項は正則化フェルミオンに由来するので、正則化フェルミオンの立場に舞い戻って考えることもできる。一般に、時間反転変換で Dirac 質量項が符号を変える（$m\bar{\psi}\psi \mapsto -m\bar{\psi}\psi$）ことから、質量をもつ Dirac フェルミオンを積分するとその低エネルギー有効理論は

$$\frac{\mathrm{sgn}(m)}{2}\left(\frac{1}{4\pi}A\mathrm{d}A + 2\mathrm{CS}_g\right) \tag{2.5.4}$$

で与えられる。このように、式 (2.5.2) の変換性は、正則化フェルミオンの質量項の反転として理解することもできる。

Dirac フェルミオンの質量項 $m\bar{\psi}\psi$ は、relevant な摂動項として機能し、$m > 0$ と $m < 0$ が異なるギャップ相を与える。この摂動項のもとで Dirac フェルミオンを積分すると、低エネルギー有効理論は質量の正負によって

$$\mathcal{L}_D = \begin{cases} 0 & (m > 0) \\ -\frac{1}{4\pi}A\mathrm{d}A - 2\mathrm{CS}_g & (m < 0) \end{cases} \tag{2.5.5}$$

のように得られる。これは、$m > 0$ のときには Dirac フェルミオンと正則化フェルミオンの寄与が互いに打ち消し、一方で、$m < 0$ のときには両者の寄与が同符号のチャーン・サイモンズ項を与えるためである。ここから、$m > 0$ では自明な絶縁体相、$m < 0$ ではホール伝導度 $\sigma_H = -1$、熱ホール伝導度 $\kappa_{xy} = -2\kappa_0$ をもつ整数量子ホール相になっていることが分かる。すなわち、massless Dirac フェルミオンは、これら 2 つの相の量子臨界点を記述する理論である。このような摂動項とそれによって実現する量子相での応答との関係は、以下で異なる理論の IR でのマッチングを考える上で重要となる。

第 3 章

U(1) チャーン・サイモンズ理論の双対性

3.1　フェルミオン・ボソン双対

2 章ではボゾンの理論同士の双対性について議論したが、フェルミオンの理論とボソンの理論の間に双対を見つけることもできる。

物理的には、フェルミオン・ボゾン双対は、分数量子ホール効果で議論される複合フェルミオン（複合ボゾン）描像の一般化と見ることができる。例えば、フェルミオンにフラックスを偶数本固着させる（**Flux attachment の処方**）と、そのフラックスから生じるアハラノフ・ボーム位相はちょうど 2π の整数倍になり、粒子の統計性を変化させない。一方で、粒子が有効的に感じる磁束の本数は変化しており、異なるフィリングの量子ホール系に関係づけることができる。この処方により、分数磁束のもとでの電子は、整数磁束のもとでの複合フェルミオン（フラックスが固着した電子）の描像に翻訳することができ、その結果、あるクラスの分数量子ホール系は複合フェルミオンの整数量子ホール系として理解することができる。同様に、フェルミオンにフラックスを奇数本固着させると、今度は統計性が入れ替わってボゾンに変化する。この場合も同様に、あるクラスの分数量子ホール系はこの複合ボソンの描像で捉えることができる。

このような Flux atachment の処方は、物質場にチャーン・サイモンズ項を結合させることで実現できる。この有効理論によって、適切な摂動項のもとで、分数チャーン絶縁体（分数異常量子ホール系）と自明な絶縁体相との間の量子臨界点を超流動・モット絶縁体相転移の言葉に翻訳して記述することなどができるようになる。この結合を系統的に行う方法の一つは、**パートン構成**とよばれる方法である。以下では、パートン構成を紹介し、その結果としてフェルミオン・ボソン双対を具体的に構成する。

パートン構成

パートン構成の手続きでは、まず電子を仮想的に複数の部分子（パートン）に分割することから議論を始める。すなわち、電子の演算子 ψ を

$$\psi = \phi f \tag{3.1.1}$$

のように、EM 電荷をもつボソン ϕ と EM 電荷をもたないフェルミオン f に分割する。このとき、2 つの部分子の間に余分な U(1) 位相の冗長性が現れるので、これを消すためにダイナミカルな Spin_C 接続 a を導入し、ϕ と f にそれぞれ a の電荷 -1 と 1 の電荷を担わせる。これによって、ϕ と f の密度が相等しくなければならないという条件が導かれる。このようなゲージ場の電荷配分のもとで、ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi, A-a] + \mathcal{L}[f, a] \tag{3.1.2}$$

のように、各パートンの理論の総和となる。冗長性を除去するために導入した創発ゲージ場のおかげで、理論全体に存在する局所演算子（すなわち、ゲージ不変な演算子）は、もとの理論の局所演算子と同一になっている。なお、ボゾンには 2 つの Spin_C 接続が $A-a$ のように結合しているので、結合したゲージ場全体としては well-defined な U(1) 束を与えている。

ここで、特にフェルミオンの理論 $\mathcal{L}[f,a]$ をギャップレスに取り、摂動項 $m\bar{f}f$ $(m<0)$ を加えて積分すると、低エネルギーで

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}[\phi,A-a]-\frac{1}{4\pi}a\mathrm{d}a-2\mathrm{CS}_g \tag{3.1.3}$$

を得る。このような理論では、ϕ はふつう複合ボゾンとよばれる。U(1) ゲージ場 b を用いて $a=b+A$ と再定義すると、

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}[\phi,-b]-\frac{1}{4\pi}(b+A)\,\mathrm{d}(b+A)-2\mathrm{CS}_g \tag{3.1.4}$$

が得られ、b の運動方程式から $j_\phi=(\mathrm{d}b+\mathrm{d}A)/2\pi$ の関係がしたがう。外場 A が無いときには、たしかにボゾン ϕ には a のフラックスが 1 本付随している。

この理論の中で、もとの電子の励起に対応する局所演算子を考える。b のモノポール演算子 $\mathcal{M}_b^\dagger$ を考えると、$j_b=-j_\phi-\mathrm{d}(b+A)/2\pi$ および $J_{\mathrm{EM}}=-\mathrm{d}(b+A)/2\pi$ より、これは b の電荷 -1 と EM 電荷 -1 を運ぶ。また、レベル 1 の b のチャーン・サイモンズ項を含むことから、これがフェルミオニックな励起であることも分かる。したがって、EM 電荷 1 を運ぶゲージ不変な局所演算子は

$$\psi=\phi\mathcal{M}_b \tag{3.1.5}$$

であり、これが電子に対応する。

摂動と量子相の関係

ここで、ボゾンの理論が Wilson-Fisher 固定点にあるとしよう。全体のラグランジアンは、

$$\mathcal{L}=|D_{-b}\phi|^2-|\phi|^4-\frac{1}{4\pi}b\mathrm{d}b-\frac{1}{2\pi}b\mathrm{d}A-\frac{1}{4\pi}A\mathrm{d}A-2\mathrm{CS}_g \tag{3.1.6}$$

である。形式的な記法を使うと、この理論は

$$T^{-1}S^{-1}T^{-1}[\mathrm{WF}] \tag{3.1.7}$$

と書くことができる。ここにボゾンの摂動項 $M^2|\phi|^2$ を加えると、$M^2<0$ のとき、ϕ はギャップをもち b のゆらぎは大きくなるので、低エネルギーでの有効理論は b を積分して

$$\mathcal{L}_{M^2<0,\mathrm{eff}}=0 \tag{3.1.8}$$

となる。すなわち、自明な絶縁体相が得られる。ただし、ここで $\mathrm{U}(1)_1$ チャーン・サイモンズ項を積分するときに $2\mathrm{CS}_g$ が生じる[*1] ことを用いた。一方、$M^2>0$ のときには ϕ は凝縮し a のゆらぎは抑制されるので、低エネルギーでの有効理論は

$$\mathcal{L}_{M^2>0,\mathrm{eff}}=-\frac{1}{4\pi}A\mathrm{d}A-2\mathrm{CS}_g \tag{3.1.10}$$

で与えられ、ホール伝導度 $\sigma_H=-1$、熱ホール伝導度 $\kappa_{xy}=-\kappa_0$ の整数量子ホール系が得られる。

この応答は Dirac フェルミオンのそれと同じであるから、これらの理論は IR で一致する（強い双対性がある）と予想できる。この予想から、2 つ目の双対性

$$[\mathrm{D}]=T^{-1}S^{-1}T^{-1}[\mathrm{WF}] \tag{3.1.11}$$

[*1] これは、レベル 1 チャーン・サイモンズ理論では TQFT の意味での分配関数が 1 次元になり古典的な重力理論と等価になるという、**ほとんど自明な理論 (Almost trivial theory)** の双対性

$$\mathcal{L}_{\mathrm{U}(N)_1}\longleftrightarrow-\frac{N}{4\pi}A\mathrm{d}A-2N\mathrm{CS}_g \tag{3.1.9}$$

からの帰結である。したがって、ここでは、「理論の他の部分と分離した $\mathrm{U}(1)_1$ チャーン・サイモンズ項を、それと等価な重力チャーンサイモンズ項に置き換えた」というのがより正確な表現である。

この事実は非可換チャーン・サイモンズ理論を扱う際に重要となり、Spin TQFT の基礎となる。これに関しては以下の章で詳述する。

が得られた。

さらに、$(ST)^3 = 1$ の関係からしたがう $STS = T^{-1}S^{-1}T^{-1}$、および 2 章で示した粒子・渦糸双対 ([WF] $= S$[WF]) を用いると、

$$[\mathrm{D}] = STS[\mathrm{WF}] = ST[\mathrm{WF}] \tag{3.1.12}$$

という新しい双対性が得られる。最右辺の理論をルールにしたがってあらわに書き下すと、

$$\mathcal{L} = |D_b\phi|^2 - |\phi|^4 + \frac{1}{4\pi}b\mathrm{d}b + \frac{1}{2\pi}b\mathrm{d}A \tag{3.1.13}$$

となる。これは上で求めたラグランジアン (3.1.6) の運動項を粒子・渦糸双対で変換し、ダイナミカルなゲージ場を積分して得られる理論とたしかに一致している。

3.2　フェルミオン・フェルミオン双対

さて、(3.1.14) の関係は [WF] の 2 種類の異なる記述を与えているので、これよりフェルミオンの理論の間の双対性

$$TST[\mathrm{D}] = T^{-1}S^{-1}[\mathrm{D}] \tag{3.2.1}$$

が得られる。これを $[\mathrm{D}] = T^{-1}S^{-1}T^{-2}S^{-1}[\mathrm{D}] = T^{-1}ST^{-2}S[\mathrm{D}]$ のように書き換え、右辺の理論をあらわに書き下すと

$$\bar{\chi}i\not{D}_a\chi + \frac{1}{2\pi}a\mathrm{d}b - \frac{2}{4\pi}b\mathrm{d}b + \frac{1}{2\pi}b\mathrm{d}A - \frac{1}{4\pi}A\mathrm{d}A - 2\mathrm{CS}_g \tag{3.2.2}$$

となる。b を積分すると結局

$$\bar{\psi}i\not{D}_A\psi \longleftrightarrow \bar{\chi}i\not{D}_a\chi + \frac{1}{8\pi}a\mathrm{d}a + \frac{1}{4\pi}a\mathrm{d}A - \frac{1}{8\pi}A\mathrm{d}A - 2\mathrm{CS}_g \tag{3.2.3}$$

の双対性が得られる。

この関係は、外場をゲージ化した理論ともとの理論が双対であることを主張しており、形式としてはボゾンの粒子・渦糸双対 (2.2.1) と同じである。実際、フェルミオン χ がフェルミオン ψ の渦糸を表しているという描像に立てば、この双対は粒子・渦糸双対のフェルミオン版であると理解することができる。右辺の理論では、$J_{\mathrm{EM}} = \mathrm{d}a/4\pi - \mathrm{d}A/4\pi$ のように、創発したゲージ場 a のフラックスが EM 電荷を担っている。一方、$\boldsymbol{B}^* = \nabla \times \boldsymbol{a}$ をフェルミオン χ が感じるフラックスとすると、これは外場のフラックスに等しいことが期待されるが、実際には

$$\boldsymbol{B}^* = -\boldsymbol{B}_{\mathrm{EM}} - 4\pi \left\langle \chi^\dagger \chi \right\rangle \tag{3.2.4}$$

となっていて（$\boldsymbol{B}_{\mathrm{EM}}$ の符号は統計性の変化に影響しないので無視すると）実効的に感じるフラックスは創発したゲージ場によって遮蔽されている。このように実際に感じるフラックスが $4\pi \left\langle \chi^\dagger \chi \right\rangle$ の分だけ減少しているのは、χ に 4π 分のフラックスが固着しているため、と理解することができる（Flux atachment）。ボゾンの渦糸が創発ゲージ場のフラックス 2π 分だったこととは対照に、フェルミオンの渦糸はスピノルの構造のためにフラックス 4π 分に対応している。この議論から、フェルミオン χ はフェルミオン ψ の渦糸を表していることが分かった。

3.3　局所演算子の対応

ここでは、いくつかの双対性を例にとって、異なる理論の局所演算子同士がどのように対応付けられるかを見る。

まず、$[\mathrm{D}] = ST[\mathrm{WF}]$ を一つ目の例に取る。ラグランジアンをあらわに書き下すと

$$\bar{\psi}i\not{D}_A\psi \longleftrightarrow |D_b\phi|^2 - |\phi|^4 + \frac{1}{4\pi}b\mathrm{d}b + \frac{1}{2\pi}b\mathrm{d}A \tag{3.3.1}$$

となり、両辺で可能な演算子を表にまとめると以下のようになる。

演算子	EM 電荷	スピン
$\mathcal{M}_A$	0	0
ψ	1	0
$\bar{\psi}$	-1	0
$\bar{\psi}\mathcal{M}_A$	-1	1/2

演算子	EM 電荷	b 電荷	スピン
$\widetilde{\mathcal{M}}_A$	0	1	0
$\mathcal{M}_b$	1	1	1/2
ϕ	0	1	0
$\phi^\dagger$	0	-1	0
$\phi^\dagger\widetilde{\mathcal{M}}_A$	0	0	0
$\mathcal{M}_b^\dagger\widetilde{\mathcal{M}}_A$	-1	0	1/2
$\phi^\dagger\mathcal{M}_b$	1	0	1/2

ここで、$\mathcal{M}_A$ などはゲージ場のフラックスを 1 本生じさせるモノポール演算子[*3]であり、スピンは演算子を一回転させたときのアハラノフ・ボーム位相として mod $\mathbb{Z}$ で計算される。局所演算子として可能なものはダイナミカルなゲージ場の電荷をもたないような演算子であるから、電荷とスピンを比較して

$$\psi \longleftrightarrow \phi^\dagger \mathcal{M}_b, \quad \mathcal{M}_A \longleftrightarrow \phi^\dagger \widetilde{\mathcal{M}}_A, \quad \bar{\psi}\mathcal{M}_A \longleftrightarrow \mathcal{M}_b^\dagger \widetilde{\mathcal{M}}_A \tag{3.3.3}$$

のように局所演算子の対応が得られる。

次に、フェルミオン・フェルミオン双対

[*3] より正確には、点 p におけるモノポール演算子 $\mathcal{M}_A(p)$ とは、時空から点 p を取り除き、その点を囲む任意の閉曲面 C 上での第一チャーン類の積分が

$$\int_C \frac{\mathrm{d}A}{2\pi} = +1 \tag{3.3.2}$$

となるという境界条件を経路積分に付け加えるような演算子のことである。

第 4 章

4 次元場の理論の S 双対との関係

4.1 S 双対

第 5 章

非可換チャーン・サイモンズ理論の双対性

5.1　準備：$\mathrm{SU}(N)_k$ および $\mathrm{U}(N)_{k,k'}$ チャーン・サイモンズ理論

はじめに、$\mathrm{U}(N)_{k,k'}$ チャーン・サイモンズ理論を考える。ラグランジアンは、$\mathrm{SU}(N)$ ゲージ場 $\tilde{b}$ と $\mathrm{U}(1)$ ゲージ場 c、または $\mathrm{U}(N)$ ゲージ場 $b=\tilde{b}+cI_N$ を用いて

$$\mathcal{L}_{\mathrm{U}(N)_{k,k'}} = \frac{k}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\left\{\tilde{b}\mathrm{d}\tilde{b}+\frac{2}{3}\tilde{b}^3\right\}+\frac{Nk'}{4\pi}c\mathrm{d}c \tag{5.1.1}$$

$$= \frac{k}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\left\{b\mathrm{d}b+\frac{2}{3}b^3\right\}+\frac{n}{4\pi}(\mathrm{Tr}\,b)\,\mathrm{d}(\mathrm{Tr}\,b) \tag{5.1.2}$$

と書ける。ここに、$k'=k+nN$ とした。理論のゲージ不変性から、k と n がともに整数になるような理論だけが許される。本章では特に、$\mathrm{U}(N)_k$ $(n=0)$ および $\mathrm{U}(N)_{k\pm N}$ $(n=\pm1)$ の場合に限定して議論を進める。$k+n$ が奇数になるとき、またそのときに限り、この理論はスピンであることが知られている。[*1] 。

一方で、可換チャーン・サイモンズ理論のときと同様に、Spin_C 接続を用いることで理論全体がスピン構造によらないように外場と結合させることができる。具体的に $\mathrm{U}(N)_k$ に対しては、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{U}(N)_k}[C] = \begin{cases} \frac{k}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\left\{b\mathrm{d}b+\frac{2}{3}b^3\right\}+\frac{1}{2\pi}(\mathrm{Tr}\,b)\mathrm{d}C & (k:\text{偶数}) \\ \frac{k}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\left\{b\mathrm{d}b+\frac{2}{3}b^3\right\}+\frac{1}{2\pi}(\mathrm{Tr}\,b)\mathrm{d}A & (k:\text{奇数}) \end{cases} \tag{5.1.3}$$

のようにすればよい。ただし、C は通常の $\mathrm{U}(1)$ ゲージ場で、A は Spin_C 接続である。同様に、$\mathrm{U}(N)_{k\pm N}$ に対しても、理論がスピンであるとき（$k\pm1$ が奇数のとき）は Spin_C 接続と結合させ、そうでないときは通常の $\mathrm{U}(1)$ ゲージ場を使うようにすると、理論全体がスピン構造の選択に依存しなくなる。

また、奇数の k に対しては $\mathrm{U}(N)_{k,k\pm N}$ の外場をゲージ化して

$$\mathcal{L}_{\mathrm{SU}(N)_k}[B]=\frac{k}{4\pi}\operatorname{Tr}\left\{b\mathrm{d}b+\frac{2}{3}b^3\right\}\pm\frac{1}{4\pi}(\operatorname{Tr}b)\,\mathrm{d}(\operatorname{Tr}b)+\frac{1}{2\pi}(\operatorname{Tr}b+B)\mathrm{d}c \tag{5.1.5}$$

のようにすればよい。ただし、第 2 項の複合は k の符号に合わせる。

5.2　ほとんど自明な理論（Almost trivial theory）

$\mathrm{U}(N)_1$ チャーン・サイモンズ理論は非自明なウィルソンラインを 1 種類だけもち、TQFT の意味での分配関数が 1 次元なので、古典的な理論と等価である。具体的には、次のような双対性があることが知られている。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{U}(N)_1}[A]\longleftrightarrow -N\left(\frac{1}{4\pi}A\mathrm{d}A+2\mathrm{CS}_g\right) \tag{5.2.1}$$

ここから、$\mathcal{L}_{\mathrm{U}(N)_1}[A]+\mathcal{L}_{\mathrm{U}(M)_1}[A]=\mathcal{L}_{\mathrm{U}(N+M)_1}[A]$ という関係がただちにしたがう。これらの理論での基本表現のウィルソンラインは transparent なフェルミオンとしてはたらくので、エニオン模型の言葉で $\mathrm{sVec}=\{1,f\}$ に対応するような理論といえる。

また、この N の範囲を拡張して

$$\mathcal{L}_{\mathrm{U}(-N)_1}[A]\equiv\mathcal{L}_{\mathrm{U}(N)_{-1}}[A] \tag{5.2.2}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{U}(0)_1}[A]\equiv\mathcal{L}_0[A] \tag{5.2.3}$$

を定義しておくと便利である。この $\mathcal{L}_0[A]$ を**ほとんど自明な理論（Almost trivial theory）**とよぶ。上に示した関係より $\mathcal{L}_0[A]$ は $\mathcal{L}=0$ と双対であり、もはや意味をなさないように見えるが、依然フェルミオンラインを含む理論である。ほとんど自明な理論は、たとえばギャップを持つ Dirac フェルミオンを積分したときに現れる。前章で見たように、Dirac フェルミオンを積分すると、パリティ・アノマリーのためにチャーン・サイモンズ項が生成される。これがもとあったチャーン・サイモンズ項のレベルをシフトさせ、ある状況ではゼロになることがある。このような理論は局所的には自明であるが、依然フェルミオニックな励起をもち、非自明なエッジモードが残ることなどがある。これが、ほとんど自明な理論の物理的な由来である。

実用上は、スピンでない理論をスピンにし、別のスピンな理論との双対を考えるときなどに $\mathcal{L}_0[A]$ を用いることがある。たとえば、$\mathcal{L}_{\mathrm{U}(N)_k}[B]$ (k : 偶数) や $\mathcal{L}_{\mathrm{U}(N)_{k,k\pm N}}[B]$ (k : 奇数) はスピンでない理論であるが、ここに $\mathcal{L}_0[A]$ を自明に結合した

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{U}(N)_k}[B,A]\equiv\mathcal{L}_{\mathrm{U}(N)_k}[B]+\mathcal{L}_0[A] \tag{5.2.4}$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{U}(N)_{k,k\pm N}}[B,A]\equiv\mathcal{L}_{\mathrm{U}(N)_{k,k\pm N}}[B]+\mathcal{L}_0[A] \tag{5.2.5}$$

などは、transparent なフェルミオンラインを含むスピンな理論である。これらの理論に含まれるウィルソンラインの数は、フェルミオンを重ねた分もとの理論の 2 倍になっている。エニオン模型の言葉で言えば、これはモジュラーテンソル圏 $\mathcal{C}$ に対して自明な $\mathrm{sVec}=\{1,f\}$ との外部テンソル積を取り、新しいスーパーモジュラーなテンソル圏 $\mathcal{C}_{\mathrm{super}}=\mathcal{C}\boxtimes\mathrm{sVec}$ を考えていることに対応する。

また、やや複雑であるが $\mathrm{SU}(N)_k$ にも $\mathcal{L}_0$ を結合させることができる。k が偶数のときは単に

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{SU}(N)_k}[B,A]&\equiv\mathcal{L}_{\mathrm{SU}(N)_k}[B]+\mathcal{L}_0[A]\\&=\frac{k}{4\pi}\operatorname{Tr}\left\{b\mathrm{d}b+\frac{2}{3}b^3\right\}+\frac{1}{2\pi}(\operatorname{Tr}b+B)\mathrm{d}c+\mathcal{L}_0[A]\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

と定義する。k が奇数のときには

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{SU}(N)_k}[B,A]\equiv\frac{k}{4\pi}\operatorname{Tr}\left\{b\mathrm{d}b+\frac{2}{3}b^3\right\}+\frac{1}{2\pi}(\operatorname{Tr}b+B)\,\mathrm{d}(c+kA)\pm\frac{1}{4\pi}B\mathrm{d}B+\mathcal{L}_0[A] \tag{5.2.7}$$

と定義する。

双対性の議論で $\mathcal{L}_0[A]$ を用いる簡単な例として、$\mathrm{U}(1)_2 \longleftrightarrow \mathrm{U}(1)_{-2}$ の双対性を考える。まず、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{U}(1)_2}[B] + \mathcal{L}_{\mathrm{U}(1)_{-1}}[A] = \frac{2}{4\pi} b\mathrm{d}b + \frac{1}{2\pi} b\mathrm{d}B - \frac{1}{4\pi} c\mathrm{d}c + \frac{1}{2\pi} c\mathrm{d}A \tag{5.2.8}$$

という理論を出発点として、右辺を $b \mapsto b + c - B, c \mapsto c + 2b - B$ とシフトして少し計算すると、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{U}(1)_{-2}}[B + 2A] + \mathcal{L}_{\mathrm{U}(1)_1}[A] - \frac{1}{4\pi} B\mathrm{d}B - \frac{1}{2\pi} B\mathrm{d}A \tag{5.2.9}$$

が得られる。場のシフトによって得られる理論は、もはや元の理論と同一ではないが、同じスペクトラムをもつので双対な理論である。すなわち、これより以下の双対性がしたがう。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{U}(1)_2}[B] + \mathcal{L}_{\mathrm{U}(1)_{-1}}[A] \longleftrightarrow \mathcal{L}_{\mathrm{U}(1)_{-2}}[B + 2A] + \mathcal{L}_{\mathrm{U}(1)_1}[A] - \frac{1}{4\pi} B\mathrm{d}B - \frac{1}{2\pi} B\mathrm{d}A \tag{5.2.10}$$

ここで、両辺に含まれるレベル 1 のチャーン・サイモンズ理論は双対な古典場の理論に置き換えることができ、両辺から同じ項を取り除くことができるように見える。しかし、この双対性はフェルミオンラインが存在するもとで成立する関係であったから、古典場の項を取り除いたあとも理論がスピンであることを覚えておけるように $\mathcal{L}_0[A]$ をくわえて

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{U}(1)_2}[B] \longleftrightarrow \widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{U}(1)_{-2}}[B + 2A] - \frac{1}{4\pi} B\mathrm{d}B - \frac{1}{2\pi} B\mathrm{d}A - 2\left(\frac{1}{4\pi} A\mathrm{d}A + 2\mathrm{CS}_g\right) \tag{5.2.11}$$

とすればよい。このとき左辺に残った理論のエニオン模型は $\mathrm{U}(1)_2 \times \{1, f\}$ であり、**セミオン・フェルミオン模型**とよばれるエニオン模型である。理論がスピンであることを明示するため、この双対性を以下では形式的に

$$\mathrm{U}(1)_2^{\mathrm{Spin}} \longleftrightarrow \mathrm{U}(1)_{-2}^{\mathrm{Spin}} \tag{5.2.12}$$

と書くことにする。

また、この双対性の両辺で（局所ではない）演算子の対応を考えることができる。(5.2.8) の理論での $e^{i\int b}$ と $e^{i\int c}$ はそれぞれ $(q_A, q_B) = (0, -1/2)$ および $(q_A, q_B) = (1, 0)$ の電荷をもち、(5.2.9) の理論での $e^{i\int \tilde{b}}$（$\tilde{b}$：$B + 2A$ と結合したゲージ場）は $(q_A, q_B) = (1, 1/2)$ の電荷をもつので、演算子の対応

$$e^{i\int \tilde{b}} \longleftrightarrow e^{-i\int b} e^{i\int c} \tag{5.2.13}$$

が得られる。

5.3　レベル・ランク双対

前章では、U(1) チャーン・サイモンズと結合したボゾン及びフェルミオンの理論を相互に結び付ける双対性を、粒子・渦糸双対を出発点として導いてきた。ここまでで得た双対性のうち主要なものを標語的に列挙すると、

$$\mathrm{U}(1)_{-1/2} + \text{フェルミオン} \longleftrightarrow \text{ボゾン} \tag{5.3.1}$$

$$\text{フェルミオン} \longleftrightarrow \mathrm{U}(1)_1 + \text{ボゾン} \tag{5.3.2}$$

$$\mathrm{U}(1)_{-3/2} + \text{フェルミオン} \longleftrightarrow \mathrm{U}(1)_2 + \text{ボゾン} \tag{5.3.3}$$

これらは、U(1) チャーン・サイモンズを含む可換な理論であるが、非可換チャーン・サイモンズ理論の双対性に次のように格上げすることができることが知られている。

$$\mathrm{U}(k)_{-N+N_f/2} + N_f \text{ フェルミオン} \longleftrightarrow \mathrm{SU}(N)_k + N_f \text{ ボゾン} \tag{5.3.4}$$

$$\mathrm{SU}(k)_{-N+N_f/2} + N_f \text{ フェルミオン} \longleftrightarrow \mathrm{U}(N)_k + N_f \text{ ボゾン} \tag{5.3.5}$$

$$\mathrm{U}(k)_{-N+N_f/2, -N-k+N_f/2} + N_f \text{ フェルミオン} \longleftrightarrow \mathrm{U}(N)_{k,k+N} + N_f \text{ ボゾン} \tag{5.3.6}$$

ここに、N_f はフレーバーで、物質場は各ゲージ場の基本表現に属する。実際、$N = k = N_f = 1$ とすると、上の可換な理論に復することが分かる。また、$N_f = 0$ とすれば、チャーン・サイモンズ理論に対する

$$\mathrm{U}(k)_{-N} \longleftrightarrow \mathrm{SU}(N)_k \tag{5.3.7}$$

$$\mathrm{SU}(k)_{-N} \longleftrightarrow \mathrm{U}(N)_k \tag{5.3.8}$$

$$\mathrm{U}(k)_{-N,-N-k} \longleftrightarrow \mathrm{U}(N)_{k,k+N} \tag{5.3.9}$$

という双対性が得られる。これは、CFT の文脈でよく知られた**レベル・ランク双対**にほかならない。レベル・ランク双対はラージ N ゲージ理論では強い双対性であることが知られているが、有限の N に対しては予想が提唱されているのみである。

物質場のないチャーン・サイモンズ理論のレベル・ランク双対

はじめに、物質場のないレベル・ランク双対の簡単な例として、$\mathrm{SU}(N)_1^{\mathrm{Spin}} \longleftrightarrow \mathrm{U}(1)_{-N}^{\mathrm{Spin}}$ の双対性を考える。$\mathrm{SU}(N)_1^{\mathrm{Spin}}$ のラグランジアンは、上で見たように $\mathrm{U}(N)_{1,1+N}$ に結合した U(1) ゲージ場をゲージ化し、

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{SU}(N)_1}[B,A] = \frac{k}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\left\{b\mathrm{d}b + \frac{2}{3}b^3\right\} + \frac{1}{2\pi}(\mathrm{Tr}\,b + B)\,\mathrm{d}(c+A) + \frac{1}{4\pi}B\mathrm{d}B + \mathcal{L}_0[A] \tag{5.3.10}$$

として定義されていた。ここで、変数変換によってこれを

$$\mathcal{L}_{\mathrm{U}(N)_1}[A] + \mathcal{L}_{\mathrm{U}(1)_{-N}}[B-NA] + \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}B + \frac{1}{4\pi}B\mathrm{d}B + \mathcal{L}_0[A] \tag{5.3.11}$$

と書き換えることができる。ただし、このとき第 1 項と第 2 項のダイナミカルなゲージ場はそれぞれ、$b+cI$ および c である。第 1 項は古典場の理論に書き換えることができ、また第 2 項と最終項はあわせて $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{U}(1)_{-N}}[B-NA]$ であるので、結局双対性

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{SU}(N)_1}[B,A] \longleftrightarrow \widehat{\mathcal{L}}_{\mathrm{U}(1)_{-N}}[B-NA] + \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}B + \frac{1}{4\pi}B\mathrm{d}B - N\left(\frac{1}{4\pi}A\mathrm{d}A + 2\mathrm{CS}_g\right) \tag{5.3.12}$$

を得る。これは $\mathrm{SU}(N)_1^{\mathrm{Spin}} \longleftrightarrow \mathrm{U}(1)_{-N}^{\mathrm{Spin}}$ にほかならない。

5.4　局所演算子の対応：バリオンとモノポール

第 6 章

分数量子ホール系への応用

6.1 分数量子ホール系の階層構造

6.2 Hubbard-Hofstadter 模型

エニオン超伝導を議論する上で基本の格子模型である、**Hubbard-Hofstadter 模型**から議論を始める。この模型は 2 次元三角格子上で定義された強束縛模型であり、ハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{HH}} = \sum_{\langle i,j|i,j\rangle,\sigma} t_{ij} c_i^\dagger c_j + h.c. + H_I \tag{6.2.1}$$

で与えられる。最終項はオンサイトの相互作用項である。また、単位格子あたり 1 つの電子があるとする[*1]。重要な点は、各三角形のプラケットに $\Phi = \pi/2$（すなわち、単位格子あたり π）のフラックスが存在していることであり、具体的にうまくパイエルス位相を取るとホッピングは純虚数にできる。したがってホッピング項は

$$H_0 = i \sum_{\langle i,j|i,j\rangle} \tau_{ij} c_i^\dagger c_j + h.c. \tag{6.2.2}$$

のようにできる。

電子の U(1) パートン分解

次に、電子の演算子をスピンを担うフェルミオニックなパートン（**スピノン**）と電荷を担うボゾニックなパートン（**ホロン**）に

$$c_i = b_i^\dagger f_{i,\sigma} \tag{6.2.3}$$

のように分解する。この分解の仕方は一意でなく、例えばスピンの SU(2) 対称性をリスペクトして各パートンを SU(2) の基本表現に取る方法などがある。これは後述するが、はじめは上のような U(1) 分解を行う。2 つのパートンの間には位相の冗長性があるので、ダイナミカルな Spin_C 接続 a に対して b と f がともに a の電荷 1 をもつとし、この冗長性を打ち消すようにする。すなわち、b_i と f_i はそれぞれ、$a - A$ と a に結合している。a のゲージ変換に対して不変になっていなければいけない条件から、電子の数密度を $n_i = 1$ に対して、各サイトで数密度の条件 $n_i^b + \sum_\sigma n_i^{f_\sigma} = n_i = 1$ が要請される。

ここで、はじめ $n_i^b = 0$ であったとして、スピノン $\sum_\sigma n_i^{f_\sigma} = 1$ が作る量子相を考える。また、スピノンが各単位胞で平均的に π のフラックスを感じるという平均場近似を仮定する。このとき、ホロンが感じるフラックスは外場と打ち消して平均的にゼロになるが、スピノンは上下のスピン自由度がそれぞれチャーン数 $C = 1$ のチャーン絶縁体をな

[*1] 電子にはスピン自由度があるので、このとき、各スピンがそれぞれ $\nu = 1/2$ のフィリングで各単位胞を埋めている。

す。したがって、スピノンの低エネルギーでの有効理論は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{spinon}}[a, A_s] = -\frac{1}{4\pi}\alpha_\uparrow \mathrm{d}\alpha_\uparrow - \frac{1}{4\pi}\alpha_\downarrow \mathrm{d}\alpha_\downarrow + \frac{1}{2\pi} a\,\mathrm{d}(\alpha_\uparrow + \alpha_\downarrow) + \frac{1}{2\pi} A_s\,\mathrm{d}(\alpha_\uparrow - \alpha_\downarrow) \tag{6.2.4}$$

$$= \frac{2}{4\pi}(a\mathrm{d}a + A_s \mathrm{d}A_s) \tag{6.2.5}$$

のように、$\mathrm{U}(1)_2$ チャーン・サイモンズ理論を用いて書ける。2 つ目の等号では、ダイナミカルなゲージ場を積分した。また、A_s はゼーマン磁場によってスピン流が誘起される**スピン量子ホール効果**[*2]（$j_s = \sigma_H^s \mathrm{d}A_s$）の応答を記述するための外場である。

ホロンはボソンであるから、ホッピングに対する相互作用の大きさを変化させると、超流動・モット相転移を生じる。この相転移点上のふるまいは Wilson-Fisher 固定点で書けるので、結局全体の理論は

$$\mathcal{L}[A, A_s] = |D_{a-A}\phi|^2 - |\phi|^4 + \frac{2}{4\pi}(a\mathrm{d}a + A_s \mathrm{d}A_s) \tag{6.2.6}$$

となる。以下では、ホロンのセクターにレレバントな摂動をくわえたときに得られる 2 つの量子相を考える。

まず、$U/t \ll 1$ でホロンが凝縮した超流動相（相 I）では、$a - A$ が質量を獲得してゆらぎが抑制されるので、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Superfluid}}[A, A_s] = \mathcal{L}_{\mathrm{spinon}}[A, A_s] \tag{6.2.7}$$

$$= \frac{2}{4\pi}(A\mathrm{d}A + A_s \mathrm{d}A_s) \tag{6.2.8}$$

となり、ホール伝導度 $\sigma_H = 2$、スピンホール伝導度 $\sigma_H^s = 2$ が得られる。これはエニオン励起をもたない整数量子ホール系（IQH）であり、トポロジカルに自明な絶縁体である。一方、$U/t \gg 1$ でホロンがギャップをもつ相（相 II）では、$a - A$ のゆらぎは大きくなり、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{CSL}}[A, A_s] = \frac{2}{4\pi}(a\mathrm{d}a + A_s \mathrm{d}A_s) \tag{6.2.9}$$

が得られる。スピンホール伝導度は相 I と同じだが、ホール伝導度が異なって $\sigma_H = 0$ となっている。相 II はセミオン励起が存在するトポロジカル秩序相となっていて、カイラルスピン液体（CSL）相にほかならない。このようにして、IQH-CSL 相転移が記述される。なお、この相転移はホロンの超流動・モット相転移に由来するので 2 次相転移である。

ホロンドーピングによる超伝導相

続いて、ホロンの数密度 n_i^b をドーピングにより変化させ、新たに得られる超伝導相を考える。まず、相 I では、この超伝導相は EM 電荷 2 のクーパー対が凝縮することによって起こる。以下のように、このクーパー対はホロンの渦糸として現れる。ホロン凝縮から生じる渦糸のふるまいを見るためには (6.2.6) の運動項を双対変換

$$|D_{a-A}\phi|^2 - |\phi|^4 \longmapsto |D_b\phi|^2 - |\phi|^4 + \frac{2}{4\pi} b\,\mathrm{d}(a - A) \tag{6.2.10}$$

すればよく、ダイナミカルな Spin_C 接続 a を積分することで

$$\mathcal{L}_{\mathrm{dual}} = j_{\tilde{\psi}} b - \frac{1}{8\pi} b\mathrm{d}b + \frac{1}{2\pi} b\mathrm{d}A \tag{6.2.11}$$

が得られる。ただし、渦糸のカレントを $j_{\tilde{\psi}}$ とした。b の運動方程式 $b = 2A$ を用いて渦糸のカレントと結合した b を A との結合項に書き換えると、渦糸が EM 電荷 2 をもつことが分かる。これはクーパー対にほかならない。また、この相では渦糸が凝縮しているため、渦糸すなわちクーパー対の凝縮による超伝導相であると理解できる。

次に、相 II では、別の機構により超伝導が実現する。ホロンドープ $n_i^b = y (0 < y \ll 1)$ のもとで、スピノン密度は $\sum_\sigma n_i^{f_\sigma} = 1 - y$ となる。スピノンは $C = 2$ のチャーン絶縁体をなしているから、ストレーダ公式より、スピノンの感じるフラックスは単位胞あたり

$$\delta\left(\frac{\nabla \times \boldsymbol{a}}{2\pi}\right) = \frac{1}{C}\delta n_i^f = -\frac{y}{2} \tag{6.2.12}$$

[*2] 名前が似ていて紛らわしいが、**スピン量子ホール効果**と**量子スピンホール効果**は別物である。前者は空間勾配を持つゼーマン磁場によってスピン流が誘起される現象であるが、後者はスピン・軌道相互作用によって非自明なエッジモードが誘起される現象である。

だけ変化し、$(\nabla \times \boldsymbol{a})/2\pi = 1 - y/2$ となる。ホロンドープがゼロの状態では、ホロンは有効的にゼロのフラックスのもとで運動していたが、これによりホロンはフラックスを感じるようになる。ホロンの感じるフラックスは外場と合わせて $n_\phi = -y/2$ となり、$n_i^b = -2n_\phi$ を満たすことになる。すなわち、ホロンはフラックスに対してフィリング $\nu = -2$ となるが、これによってホロンは $\nu = -2$ のチャーン絶縁体となっていること考えるのが自然である。この仮定のもとでホロンを積分すると、

$$\mathcal{L}_{\text{holon}}[A] = -\frac{2}{4\pi}(a - A)\,\mathrm{d}(a - A) \tag{6.2.13}$$

となり、(6.2.6) に代入してダイナミカルなゲージ場を積分すると、

$$\mathcal{L}_{\text{doped}}[A, A_s] = \frac{2}{2\pi}A\mathrm{d}a - \frac{2}{4\pi}A\mathrm{d}A + \frac{2}{4\pi}A_s\mathrm{d}A_s \tag{6.2.14}$$

が得られる。第 1 項はマイスナー効果（$2\int \mathrm{d}A/2\pi \in \mathbb{Z}$）を表しており、超伝導の実現を示している。また、系全体の電気抵抗率テンソルがホロンとスピノンの電気抵抗率テンソルの和で書ける Ioffe-Larkin 則を用いると、スピノンとホロンが互いに逆符号のチャーン数を持つチャーン絶縁体をなしていることからこれらは互いに打ち消し、電気抵抗はゼロになる。これもまた超伝導相の実現を示している。

第 7 章

量子ホール系の熱電応答への応用

7.1 久保公式と熱電応答の Luttinger 理論

7.2

付録 A

高次対称性の直観的方法

この章では、高次対称性の基本的な概念（高次大域的対称性、荷電オブジェクト、生成子、位相欠陥など）を実用上必要な範囲で紹介する。まず、もっともなじみ深い（と思われる）大域的対称性である 1 次元系の並進対称性から書き起こし、高次元に一般化しやすい表記で書き換えた後、いくつかの具体例を見ていく。

A.1　1 次元量子力学系

まず、トイモデルとしてポテンシャルのない 1 次元円環上の量子力学を考える。簡単のため、作用はユークリッド化して虚時間発展を見ることにする。作用は

$$S_{\mathrm{QM}} = \frac{m}{2}\int \mathrm{d}\tau \dot{X}^2 \tag{A.1.1}$$

で与えられる。円環の半径は 1 とし、$X \sim X + 2\pi$ の同一視があるとする。ドットは虚時間微分を表す。微分形式に馴染みのない読者のために、しばらくはあらわに座標を表示して議論を進める。

この作用には大域的並進変換 $X \longmapsto X + \alpha$ で不変、という $\mathrm{U}(1)$ 対称性がある。量子力学でなじみ深いように、この変換の生成子は正準共役運動量 $P = m\dot{X}$ である。ここで、「生成子である」の意味は、正準量子化ののちに

$$e^{i\alpha P} X e^{-i\alpha P} = X + \alpha \tag{A.1.2}$$

を満たすことである。この関係を無限小で見ると

$$[i\alpha P, X] = \alpha \tag{A.1.3}$$

となるが、これはもちろん正準交換関係にほかならない。のちの一般化のために、大域的対称性に対して生成子を系統的に導出する方法に触れておく。これは場の理論で **Gell-Mann–Levi の方法**と呼ばれているもので、微小変化の α を一時的に $\alpha(\tau)$ のように虚時間に依存させてラグランジアンを

$$\mathcal{L} \longmapsto \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{X} + \dot{\alpha})^2 \simeq \frac{m}{2}\dot{X}^2 + \dot{\alpha} m \dot{X} \tag{A.1.4}$$

と変化させる。2 つ目の等号では、α の高次の微小量は無視した。ここから、ラグランジアンの変分 $\delta\mathcal{L}$ を $\dot{\alpha}$ で微分して得られる

$$\frac{\partial \delta\mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = m\dot{X} \tag{A.1.5}$$

が並進変換の生成子となる。ラグランジアンがこの変換で不変となるためには、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} m\dot{X} = 0$ となっていなくてはいけないが、これは運動方程式から保証される。$m\dot{X}$ はこの意味で並進対称性に付随するネーター保存量であって、したがってもとの無限小連続変換の生成子でもある。

さて、次に視点を変えて $U^{\partial}_{\alpha}(\tau) \equiv e^{i\alpha P(\tau)}$ という演算子の真空期待値

$$\left\langle U^{\partial}_{\alpha}(\tau) \right\rangle = \left\langle e^{i\alpha P(\tau)} \right\rangle \tag{A.1.6}$$

を考えてみる。$U^\partial_\alpha(\tau)$ が有限の並進変換を生成していたことから、

$$\left\langle U^\partial_\alpha(\tau)\right\rangle = \sum_X \langle\Omega|\, U^\partial_\alpha(\tau)\,|X\rangle\,\langle X|\Omega\rangle = \sum_X \langle\Omega|X+\alpha\rangle\,\langle X|\Omega\rangle \tag{A.1.7}$$

となって、これは X を点 τ において α だけずらす「欠陥」と見ることができる。すなわち、$U^\partial_\alpha(\tau)$ が挿入されたもとでの相関関数を計算するには、$X(\tau)$ が α だけ不連続となる境界条件（$X(\tau-0)+\alpha = X(\tau+0)$）を新たに加え、これを満たす配位について足し上げた経路積分を計算すればよい。この意味で、$U^\partial_\alpha(\tau)$ は (τ,∞) の領域で X を一様に α だけ並進させる大域的対称性を生成している。同様に、$U^\partial_\alpha(\tau)$ の 2 つ組 $U_\alpha(\tau_2,\tau_1) = U^\partial_{-\alpha}(\tau_2)U^\partial_\alpha(\tau_1)$ を相関関数に挿入することで、有限領域 (τ_1,τ_2) での並進変換を生成することができる。また、同一の領域 $\Sigma = (\tau_1,\tau_2)$ に複数の欠陥が挿入されているときには、和則

$$U_\alpha(\partial\Sigma)U_\alpha(\partial\Sigma) = U_{\alpha+\beta}(\partial\Sigma) \tag{A.1.8}$$

が成立する。ただし、Σ の境界にのみ演算子が挿入されていることを示すため、引数は $\partial\Sigma$ とした。以降は経路積分で議論を進めるので、演算子の等式は任意の相関関数の中で成立するものと約束し、また演算子の順序は自動的に時間順序になっているものと了解する。

一方で、$X \sim X+2\pi$ の同一視を取り入れるには、$X(\tau)$ そのものよりも $W_n(\tau) = e^{inX(\tau)}$ を考えるのがよい。ただし、$W_n(\tau)$ が well-defined な演算子になるためには、n は整数でなくてはならない。このとき、$W_n(\tau)$ は欠陥 $U_\alpha(\partial\Sigma)$（Σ は τ を含む有限領域）によって検出することができる。これは、$U_\alpha(\partial\Sigma)$ の挿入によって、$W_n(\tau) = e^{inX(\tau)} \longmapsto e^{in(X(\tau)+\alpha)} = e^{in\alpha}W_n(\tau)$ と変化するためである。より標語的に書けば、

$$U_\alpha(\partial\Sigma)W_n(\tau) = e^{in\alpha}U_\alpha(\partial\Sigma) \tag{A.1.9}$$

となる。この意味で、欠陥 $U_\alpha(\partial\Sigma)$ は U(1) に値を取る場 e^{iX} に作用（$g = e^{i\alpha} : e^{iX} \mapsto e^{i\alpha}e^{iX}$）し、演算子 $W_n(\tau)$ はその作用を相関関数の U(1) 位相[*1]に送る線形表現（$R : e^{i\alpha} \mapsto e^{in\alpha}$）を指定している、と言える[*2]。

重要なことは、$W_n(\tau)$ および $U_\alpha(\partial\Sigma)$ は連続変形に対して（相関関数の位相の意味で）不変、ということである。実際、$\partial\Sigma$ を連続変形させても τ をまたがないかぎり位相は変化せず、また、Σ の境界をまたがない範囲で τ を変化させても同様である。このようなトポロジカルな性質を踏まえ、$U_\alpha(\partial\Sigma)$ を**位相欠陥**（あるいは、Symmetry defect operator: SDO）とよび、$W_n(\tau)$ を**荷電オブジェクト**とよぶ。また、荷電オブジェクトが p 次元で定義されているとき、この対称性を ***p*-form の大域的対称性**とよぶ。今の場合は 0-form の対称性である。

位相欠陥の挿入は、背景場との結合と見ることができる。$U_\alpha(\partial\Sigma)$ のもとで経路積分は

$$\int \mathcal{D}Xe^{-S_{\mathrm{QM}}} \longmapsto \int \mathcal{D}XU_\alpha(\partial\Sigma)e^{-S_{\mathrm{QM}}} = \int \mathcal{D}X\exp\left\{-\frac{m}{2}\int \mathrm{d}\tau\dot{X}^2 + i\alpha(P(\tau_1)-P(\tau_2))\right\} \tag{A.1.10}$$

となる。正準共役運動量を力学変数を用いて書くと、これは以下のように再定義された作用のもとで相関関数を計算することと等価である。

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{QM}} \longmapsto S'_{\mathrm{QM}} &= \frac{m}{2}\int \mathrm{d}\tau\dot{X}^2 + i\alpha\int \mathrm{d}\tau\dot{X}(\tau)\delta_\tau(\partial\Sigma) \\ &= \frac{m}{2}\int \mathrm{d}\tau\left(\dot{X} + i\frac{\alpha}{m}\delta_\tau(\partial\Sigma)\right)^2 \\ &\equiv \frac{m}{2}\int \mathrm{d}\tau\left(\dot{X} + iA_\tau\right)^2 \end{aligned} \tag{A.1.11}$$

ここで、$\delta_\tau(\partial\Sigma) \equiv \delta(\tau-\tau_2) - \delta(\tau-\tau_1)$ とし、定数項は落とした。このとき、「位相欠陥」は電荷をもつ場 $X(\tau)$ に最小結合した外場（ただし、特異な）として書けている。新たに位相欠陥を挿入したいときには、背景場 A_τ を変換して特異性を新たに挿入すればよい。このように、位相欠陥は背景場のネットワークとして表現することができる。

[*1] ここでの「位相」は phase の意味である。

[*2] したがって、一般の大域的対称性では、$U_g(\partial\Sigma)$ や $W_R(\tau)$ のようにそれぞれ群の元および表現でラベルされる。可換群 G の場合には、表現は $G^\vee \simeq \mathrm{Hom}(G,\mathrm{U}(1))$ でラベルされ、今の場合は $G \simeq \mathrm{U}(1), G^\vee \simeq \mathbb{Z}$ である。

のちの一般化のために以上の議論を微分形式を用いて書き直すと、作用は

$$S_{\mathrm{QM}} = \frac{m}{2}\int \mathrm{d}X \wedge \star \mathrm{d}X \tag{A.1.12}$$

であり、大域的対称性 $X \longmapsto X + \epsilon^{(0)}$ $(\mathrm{d}\epsilon^{(0)} = 0)$ を生成する保存カレントは $j = m\mathrm{d}X$ である。$\epsilon^{(0)}$ の上付き添字は 0-form であることを示している。j が保存カレントであることは運動方程式 $\mathrm{d} \star \mathrm{d}X = \mathrm{d} \star \mathrm{d}X = 0$ から分かる。この保存カレントを Gell-Mann–Levi の方法から導くには、ラグランジアンの変分 $\delta\mathcal{L}_{\mathrm{QM}} = m\mathrm{d}\epsilon^{(0)} \wedge \star\mathrm{d}X = \mathrm{d}\epsilon^{(0)} \wedge \star j$ から読み取ればよい。逆に、保存カレント j が与えられているときは $\mathrm{d}\epsilon^{(0)} \wedge \star j$ がこのカレントが生成する微小変換である。位相欠陥と荷電オブジェクトは、それぞれ

$$U_\alpha(\partial\Sigma) = \exp\left\{i\alpha\int_{\partial\Sigma} \star j\right\}, \quad W_n(\tau) = \exp\{inX\} \tag{A.1.13}$$

と書ける。

A.2　3 次元コンパクトボゾン

次に、比較的非自明な例として、3 次元のコンパクトなボゾン（$\theta \sim \theta + 2\pi$）の理論

$$\mathcal{L} = \frac{v^2}{2}\mathrm{d}\theta \wedge \star\mathrm{d}\theta \tag{A.2.1}$$

を考える。このとき、運動方程式 $v^2\mathrm{d} \star \mathrm{d}\theta = 0$ から得られる $j_e^{(1)} = v^2\mathrm{d}\theta$ に加え、$(1/2\pi)\mathrm{dd}\theta$ によって自明に保存するカレント $j_m^{(0)} = (1/2\pi) \star \mathrm{d}\theta$ が存在する。前者から生成される大域的対称性を **0-form 電気的 $\mathbf{U(1)}_{e}^{[0]}$ 対称性**とよび、後者から生成される大域的対称性を **1-form 磁気的 $\mathbf{U(1)}_{m}^{[1]}$ 対称性**とよぶ。

$\mathrm{U}(1)_e^{[0]}$ 対称性の位相欠陥は $U_{e,\alpha}(C) = e^{i\alpha\int_C \star j_e} = e^{i\alpha v^2 \int_C \star \mathrm{d}\theta}$ である。この保存カレントから生成される対称性は

$$\mathcal{L} + \mathrm{d}\epsilon^{(0)} \wedge \star j_e = \frac{v^2}{2}\mathrm{d}\Big(\theta + \epsilon^{(0)}\Big) \wedge \star\,\mathrm{d}\Big(\theta + \epsilon^{(0)}\Big) \tag{A.2.2}$$

より、θ の並進変換 $\theta \mapsto \theta + \epsilon^{(0)}$ であると分かる。したがって、電荷 n をもつ荷電オブジェクトは $W_n(p) = e^{in\theta}$ で与えられ、変換 $U_{e,\alpha}(C)$ のもとで $W_n(p) \mapsto e^{in\alpha}W_n(p)$ と変換する。このコンパクトボゾンの理論が（ハバード模型の超流動相、3 次元ハイゼンベルク模型の強磁性相、ゲージ・ヒッグス模型のギャップ相のように）複素スカラー場の U(1) 対称性が自発的に破れて得られた模型だとすると、この荷電オブジェクト $W_n(p)$ は対称性が破れる前のもとの場 $\varphi \sim ve^{i\theta}$ にほかならない。

一方、$\mathrm{U}(1)_m^{[1]}$ 対称性の位相欠陥は $U_{m,\beta}(\gamma) = e^{i\beta\int_\gamma \star j_m} = e^{(i\beta/2\pi)\int_\gamma \mathrm{d}\theta}$ である。この保存カレントから生成される対称性は、（ラグランジアンの中の演算子を用いてあらわに書くことはできないが）渦糸の位相を変換する大域的対称性である。したがって、電荷 n をもつ荷電オブジェクトは $\int(\mathrm{d}\theta/2\pi) = n$ となる 1 次元渦糸 $\mathcal{M}_{n,\theta}$ で、変換 $U_{m,\beta}(\gamma)$ のもとで $\mathcal{M}_{n,\theta} \mapsto e^{in\beta}\mathcal{M}_{n,\theta}$ と変換する。

A.2.1　コンパクト QED_3 での電荷の閉じ込め

次に、前節で述べたコンパクトボゾンの理論が双対描像として重要になる例として、QED_3（3 次元コンパクト U(1) ゲージ理論）

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}_3} = \frac{1}{4e^2}F \wedge \star F \tag{A.2.3}$$

を考える。この理論には 2 つの対称性（$d \star F = 0$ に付随する電気的 $\mathrm{U}(1)_e^{[1]}$ 対称性、および $dF = 0$ に付随する磁気的 $\mathrm{U}(1)_m^{[0]}$ 対称性）がある。電気的対称性の荷電オブジェクトはウィルソンライン $e^{i\int a}$ で、物理的には電荷をもった粒子の世界線に対応する。また、磁気的対称性の荷電オブジェクトは 0 次元のモノポールで、これはモノポールを囲む任意の閉曲面での積分で $\int(\mathrm{d}a/2\pi) = m \in \mathbb{Z}$ の境界条件を課すような演算子である。もしゲージ群がノンコンパクトであれば、このようなモノポールは構成できないので磁気的対称性は保存する。一方、今のようにゲージ群 U(1) がコ

ンパクトである場合にはモノポールが理論に含まれているので磁気的対称性は explicit に破れている。その結果、モノポールが凝縮し電荷の閉じ込めが起こる。このモノポール凝縮と電荷の閉じ込めは 1970 年代の Polyakov の結果であるが、高次対称性の言葉でより一貫した理解が得られないだろうか？

このことは、双対描像で書き換えるとよく分かる。まず、もとのゲージ場と双対なコンパクトボゾン $\sigma \sim \sigma + 2\pi$ を以下のように導入する。

$$\star \mathrm{d}a = \mathrm{d}\sigma \tag{A.2.4}$$

このとき、ラグランジアンは前節で書き下したものになり、もとの理論の電気的対称性と磁気的対称性はそれぞれ、双対な理論の磁気的対称性と電気的対称性に入れ替わる。ただし、モノポール（$e^{i\sigma}$）が凝縮していることから、（双対理論で見た）電気的対称性を explicit に破るようなポテンシャルがラグランジアンに加わる（典型的には $\mathcal{M} + \mathcal{M}^\dagger \sim \cos\sigma$）。この双対描像では、もとの理論でのウィルソンラインが、それを囲む閉曲線 C に沿った積分で $\int \mathrm{d}\sigma/(2\pi) = m \in \mathbb{Z}$ となる境界条件を課す 1 次元演算子として定義される。すなわち、ウィルソンラインを囲む C 上の積分で σ の値は整数分だけ内部空間で巻きつく。しかし、いま、$\sigma \mapsto \sigma + \alpha$ の対称性は explicit に破れており、たとえば $\sigma = 0$ がエネルギー最小の配位になっている。有限の巻きつき数と「$\sigma = 0$ がエネルギー最小」を両立するためには、どうすればよいだろうか？答えは、「C 上の 1 点でだけ σ が特異な値を持つとし、それ以外の場所では $\sigma = 0$ とすることで、全体での積分が正しい巻きつき数を与えるようにする」ことである。言い換えれば、電荷と電荷の間をつなぐ電気力線がこの特異な点に絞られるようにすればよい。これがいわゆる「電気力線の閉じ込め」であり、その結果として電荷同士にはたらく引力は電荷間の距離に比例するような閉じ込めポテンシャルになる。

次に、元の理論に物質場（フェルミオン）をくわえることを考える。これによってウィルソンラインは途中で切れるので、電気的対称性は explicit に破れる。一方、フェルミオンの効果によって、磁気的対称性は回復する。この事実は、（やや「飛び道具」的だが）以下の主張によって理解できる。

- 背景にモノポールが存在するとき、ディラック演算子はゼロモードを持つ。

これはアティヤ・シンガーの指数定理からの帰結である。経路積分を取るときにモノポールが存在するような配位は、このディラック演算子のゼロモードによるゼロ因子 $\det \not{D}$ を伴なうので、分配関数への寄与がゼロになる。結局、分配関数に寄与するのはモノポールを含まない配位だけなので、磁気的対称性を破るようなモノポールは存在せず、この対称性は回復する。また、この理論では、

結果をまとめたのが以下の表である。

	電気的対称性	磁気的対称性
ノンコンパクト QED_3	保存する	保存する
コンパクト QED_3	保存する	explicit に破れる
コンパクト QED_3 ＋フェルミオン	explicit に破れる	保存する

参考文献