分数量子ホール系からはじめる $\mathrm{TQFT}_3/\mathrm{CFT}_2$ 対応

物理学アドベントカレンダー 2025

中島悠翔（X: @Hadron_kyoto）

目次

1 はじめに

自然界に「対応」を見ると大喜びする物理学徒の端くれとして、一見まったく異なるように見える対象が、実は同じ対象を異なる側面から見ているに過ぎなかった、というストーリーには時として感動すら覚えるものです。そうした「対応」の発見は、単に多角的でより豊かな見方を可能にするというのみならず、一方の島で発展した手法や概念をもう一方の島に持ち込む、概念の「貿易」を可能にするという点で、実用的なツールとして重要な「橋」の建設であるとも言えます。

さて今回は、物理学アドベントカレンダー 2025・9 日目の記事として、分数量子ホール系にまつわるトピックを紹介したいと思います。分数量子ホール系は 1982 年に初めて実験で観測され [Tsui et al., 1982]、その後、ものの 10〜20 年の間に恐ろしいスピードで理論が発展してきた分野です。そして、この数十年のあいだに、どうやら従来の固体物理学の「管轄」を大幅に超える物理や数理が背後に潜んでいるらしいぞ、ということが続々と明らかになってきた分野でもあります。

中でも特に興味深い点は、分数量子ホール系は、3 次元の位相的場の理論（Topological Quantum Field Theory, TQFT）と 2 次元共形場理論（Conformal Field Theory, CFT）の間の横たわる対応関係を直接、具体的に見ることができる物理現象の一つであるということです。この直接的な関係は、1991 年に Moore と Read によって次のような形で指摘されました [Moore and Read, 1991]。

Moore-Read 予想（要約）

低エネルギー有効理論が 3 次元 TQFT で記述されるどんな分数量子ホール系に対しても、その波動関数を正則な共形ブロックとして与えるような 2 次元 CFT が必ず存在する。また、このような CFT のうちミニマルなものは、エッジの励起を記述する CFT と同一である。

このノートの目標は、この予想の意味するところを解説し、それによって何が可能になるのかを紹介することです。それと同時に、分数量子ホール系への現代的なイントロダクションとしての役割も果たせることを目指しました。そのため、一年前の自分に向けて書いたまとめノートだと思いながら、できるだけ前提知識を仮定しないようこころがけました。誤りを発見された際には、ぜひ筆者（X: @Hadron_kyoto）までお知らせください。

1.1 ノートの構成

2 章では、分数量子ホール効果の現象論的な基本事項をいくつかの実験事実を交えて解説します。また、あるクラスの分数量子ホール系をよく記述する複合フェルミオン（ボゾン）描像と呼ばれる枠組みを紹介し、ホール伝導度がある分数の系列として量子化されることを見ます。

3 章では、低エネルギー有効理論として Chern-Simons 理論を用いた分数量子ホール系の記述を紹介します。複合フェルミオン（ボゾン）描像を場の理論の枠組みの中に自然に取り込むことができる Ginzburg-Landau-Chern-Simons 理論から議論をはじめ、その双対的な描像として、エニオン励起を自然に記述する Wen-Zee の有効 Chern-Simons 理論と呼ばれる場の理論を導入します。また、Moore-Read 状態や Read-Rezayi 系列など非可換な分数統計をもつエニオンにも触れ、モジュラーテンソル圏の言葉を用いて分数量子ホール系の代数的な構造をいくつかの具体例を交えて紹介します。

4 章では、電子多体系のハミルトニアンから出発し、多体波動関数を用いた分数量子ホール系の記述を紹介します。Chern-Simons 理論の言葉で Wilson ラインの巻きつきとして理解されたエニオン統計が、この枠組みでは、波動関数のブランチカットとして現れることなどを見、Chern-Simons 理論での記述と対応させる形でいくつかの具体例を紹介します。

5 章では、バルクの物理が CFT で記述できることを紹介し、基底状態の波動関数やエニオン励起が CFT の言葉でどのように書かれるのかを見ます。まず、バルクの多体波動関数が CFT のカイラルな共形ブロックで記述できることを見たあと、具体例を通じて、波動関数を CFT の方法で構成する一般的なプロセスを解説します。また、非可換な分数量子ホール系への階層性の一般化の試みをいくつかピックアップして紹介します。

6 章では、エッジに現れるカイラルなモードを記述する理論をバルクの有効理論から導き、一般に 1 次元量子系の低エネルギー領域を記述するボゾン化の手法が有効であることを見ます。また、エッジモードがバルクの波動関数を構成したのと CFT と同じ CFT で記述できることを紹介します。

7 章では、これまでの内容を統合し、分数量子ホール系を記述する TQFT と CFT が、互いに等価な対応関係にあることを見ます。

1.2 定義・単位系・表記

- 自然単位系：$\hbar = c = e = 1$
- Lie 代数：$U = \exp[ia] \in G$
- 電子の電荷：$e = 1 > 0$
- 電磁気的な U(1) 外場（Spin_C 接続）：A
- ダイナミカルなゲージ場：$b, c, \cdots$
- ダイナミカルな Spin_C 接続：a
- 自明な場合には、ウェッジ積の記号 $\wedge$ をしばしば省略します。（例：$b\mathrm{d}b \equiv b \wedge \mathrm{d}b$）
- 電磁気的な（通常の）ゲージ・ポテンシャルおよび電磁気的なカレントのことを、このノートでは単に、「EM 外場」ないし「EM カレント」と表記することにします。EM は Electromagnetic の意味です。

1.3 このノートの読み方

- 大前提として、ペーペーの院生が自分用に書いただけの、正確さの保証されていない文章だという心持ちで読んでください。原著論文や査読済みレビュー論文を含む参考文献を可能な限り付しましたので、このノートの内容を参考にするときには、必ず原論文にもあたるようにしてください。
- 何か所か作業中の部分があり、目次の内容と必ずしも一致しない部分があります。
- 「**この章のキーワード**」には、その章の議論のカギとなる用語を列挙しました。
- 「**ポイント**」には、特に議論のチェックポイントとなる事実を挙げました。「ポイント」の内容を標語的に記憶することで、自分であとから議論を再現する際の助けにできるように整理しました。
- 「**この章のまとめ**」には、その章の要約とポイントを簡単に付しました。
- 「**この章についてくわしく**」には、その章で扱ったトピックについての教科書やレビュー論文のリストを付しました。

2 分数量子ホール系ことはじめ

本ノートがこれから扱う**分数量子ホール効果（*Fractional quantum Hall effect*）**（以下、単に『FQH』といいます）とは、低温・強磁場下の 2 次元電子系で、後述するホール伝導度と呼ばれる量が分数に離散化される現象です。

古典的には、垂直な磁場のもとでの電子系は、それぞれの電子が磁場と垂直な方向にローレンツ力を受けてサイクロトロン円運動を行います。このサイクロトロン円運動は z 軸方向の磁場に垂直な xy 面内で起こるため、磁場が十分に強いときには z 軸方向の自由度は無視でき、これを実質的に 2 次元の系として扱うことができます。

一方、低温（典型的には、数 10 mK〜数 100 mK）では量子効果が卓越し、バルクのエネルギースペクトラムには平坦な Landau 準位

$$E_n = \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2.1}$$

が現れます。サイクロトロンエネルギー ω_c が Coulomb 相互作用のエネルギーよりも十分大きくなるような極端な強磁場（典型的には、$B \sim 10$ T）では、高い Landau 準位（$n = 1, 2, \cdots$）に上がるような遷移が無視でき、その結果、最低 Landau 準位（$n = 0$；以下、Lowest Landau Level の意味で、単に『LLL』といいます）の電子だけで有効的に物理が支配されるような系が実現します。Landau 準位は運動エネルギーが運動量に依存しない、平坦な分散関係をもつため、LLL において運動エネルギーは凍結し、Coulomb 相互作用の効果がもっぱら支配的な因子となります。この意味で強磁場下の 2 次元電子系は典型的な強相関電子系の話であると言えるのですが、分散関係が平坦であるためにその運動は電子の有効質量 m^* に依存しないという、強相関電子系のなかでもかなり独特な性質をもった系になっています。

この章では、あとの章に進むための下準備として FQH という現象を概観し、あるクラスの FQH を記述する基本的な枠組みである複合フェルミオン（ボゾン）描像を紹介します。

この章のキーワード

- 分数量子ホール効果（FQH）
- GaAs/AlGaAs ヘテロ接合
- ホール伝導度
- エニオン
- フュージョン、ブレイディング
- 磁気ロトン、Kohn モード
- 複合フェルミオン（ボゾン）
- Laughlin 状態
- Jain 系列

2.1 現象と歴史

FQH が実験で初めて観測されたのは、1982 年のことです [Tsui et al., 1982]。この実験では、GaAs（ガリウムヒ素）と AlGaAs（アルミニウムガリウムヒ素）という異なる 2 種類の半導体を接合（**GaAs/AlGaAs ヘテロ接合（*GaAs/AlGaAs hetero junction*）**）した不純物の少ない界面に強磁場を加え、**ホール伝導度（*Hall conductivity*）**が $\sigma_H = 1/3$ という分数の値に離散化することが発見されました。

ホール伝導度 σ_H は、図 1（左）のように、ある方向にかけた電位差 V_y とそれと垂直な方向に流れる電流 J_x との比で

$$J_x = \frac{\sigma_H}{2\pi} V_y \tag{2.2}$$

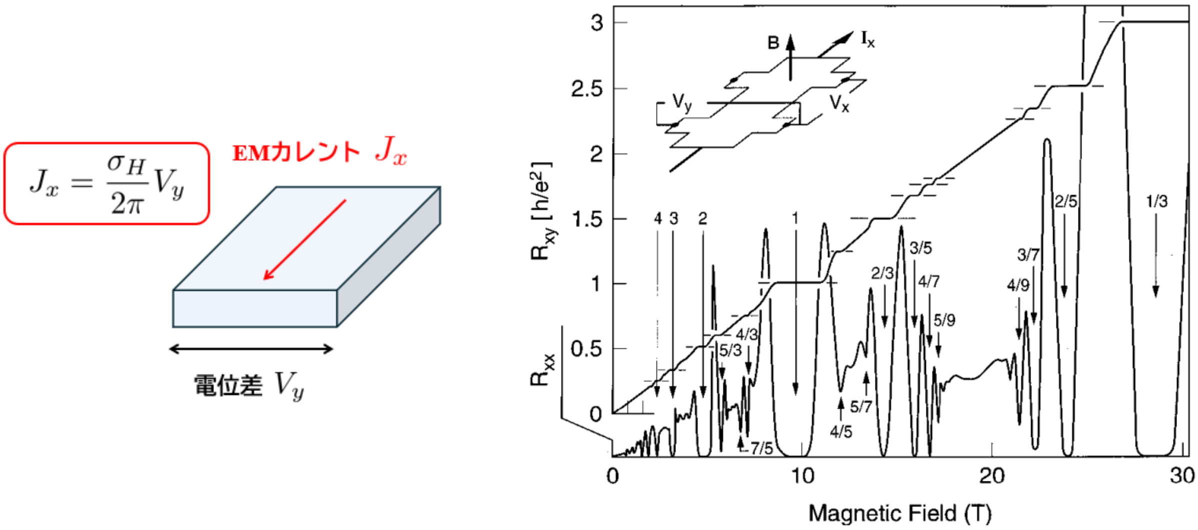


図 1　（左）量子ホール効果の模式図と、ホール伝導度 σ_H の定義。鉛直方向に厚みがあるように見えますが、実際の実験系では半導体界面として実現する系であり、強磁場下では有効的に 2 次元電子系として扱うことができます。（右）[Willett et al., 1987] によるホール抵抗率と縦抵抗率のグラフ。実験では電流の大きさを固定して電位差を測定するので、このグラフのように、通常は伝導率ではなく抵抗率をデータとしてプロットします。グラフ中、左上に描かれているのは、**ホール・バー（*Hall bar*）**と呼ばれる、ホール伝導度などを測定するための多端子のついた実験装置の模式図です。

のように定義されます[*1]。この GaAs/AlGaAs ヘテロ接合での $\sigma_H = 1/3$ 状態が、歴史上最初に見つかった FQH にほかなりません。FQH 発見の 2 年前に見つかっていた**整数量子ホール効果（*integer quantum Hall effect*）**（以下では単に、『IQH』と呼びます）[Klitzing et al., 1980] では不純物が本質的な役割を果たしますが、これとは対照的に、FQH は不純物の少ない半導体界面で実現されます。ちなみに、1985 年には IQH に、1998 年には FQH に、それぞれノーベル物理学賞が与えられています。

さて、その後多くの実験が行われ、現在知られている精密な結果 [Willett et al., 1987] を図 1（右）に示しました。図 1（右）中、ホール抵抗率 R_{xy} は電圧と垂直な電流に関係する量ですが、縦抵抗率 R_{xx} は電圧と同じ方向の電流に関係する量です。FQH が実現している領域（**ホール・プラトー（*Hall plateau*）**）ではホール抵抗率は定数になっていますが、同じ領域で縦抵抗率を見ると $R_{xx} = 0$ となっています。これは、FQH は縦方向には絶縁体になっていて、ギャップの開いた非圧縮な状態であるということを示しています。一方で、電圧と電流が垂直なときにはジュール熱によるエネルギー散逸が無いので、ギャップが開いていてもホール抵抗率が有限であることは許され、これが離散的な値を取った状態が IQH ないし FQH であると言えます。

ポイント　1

1982 年に初めて発見された FQH は、ホール伝導度が分数に離散化されたギャップ相であり、実験的には低温（∼数 10 mK から数 100 mK）、強磁場（∼10 T）かつ不純物の少ない半導体界面で実現する。

2.2　ホール伝導度とフィリング

平坦な 2 次元面での FQH のホール伝導度 σ_H は、LLL の**フィリング（*filling*）**$\nu = p/q$（あるいは、**充填率**とよばれることもあります）と一致します[*2]。これは、以下のような簡単な議論で示すことができます。

[*1] 係数の 2π（自然単位系を使わずにプランク定数 h や電荷 e をあらわに表示すると $1/2\pi = e^2/h$ と書けます）も含めてホール伝導度と呼ぶこともありますが、本ノートではこの定義を採用します。

[*2] 正確に言えば、曲がった曲面上での FQH や、有限の種数（穴）をもつトーラスのような多様体上の FQH では、4.7 節で詳しく見るように、ランダウ準位の縮退度に**シフト（*Shift*）**と呼ばれる補正項 [Wen, 1992] が入るので、以下の議論は修正が必要です。

まず、磁場中の電子がローレンツ力を受けて一方の端に蓄積し、生じた電場 $E_y = V_y/L_y$ からの力とローレンツ力 $vB = BJ_x/(nL_y)$（n：電子の密度）がつりあっているという古典的な描像から、

$$V_y = \frac{BJ_x}{n} \qquad \text{すなわち、} \qquad \sigma_H = \frac{2\pi n}{B} \tag{2.3}$$

が得られます。次に、4 章で詳しく議論するように、LLL の縮退度 M は系を貫くフラックスの本数[*3] に等しいので、系の面積を S として、

$$nS = \nu M = \nu S \frac{B}{2\pi} \qquad \text{すなわち、} \qquad \nu = \frac{2\pi n}{B} \tag{2.5}$$

以上より、$\sigma_H = \nu = p/q$ がしたがいます。このことは、LLL が分数のフィリングのもとで部分的に埋まった場合に FQH が実現することを示しています。バンドを部分的に埋めた状態がなぜギャップを持つことになるのか？このことは LLL が完全に埋まることでギャップが生じる IQH とは対照的な、本質的に強相関である FQH の非自明さを際立たせています。

2.3 FQH 基底状態からの励起

さて、FQH がギャップをもつことを見たところで、FQH 基底状態からの励起の構造を紹介します。FQH の大きな特徴の一つとして、分数電荷をもった**エニオン（*anyon*）**と呼ばれる励起の存在が挙げられます。

2.3.1 エニオン

エニオンは、ボゾンでもフェルミオンでもない「第三の統計性」をもった粒子です。3 次元以上の系では、物理的に実現する粒子はボゾンかフェルミオンのいずれかに限られていましたが、2 次元の系ではこうした第三の統計性が許されます。2 粒子を交換したとき、エニオン統計では

$$\Psi_{\text{anyon}}(\eta_1, \eta_2) = e^{i\alpha} \Psi_{\text{anyon}}(\eta_2, \eta_1) \tag{2.6}$$

のように、一般に 1 とも −1 とも異なる位相因子を獲得します。また、この 2 粒子の交換のプロセスを 2 回続けて行うと、波動関数は $e^{2i\alpha}$ の位相を獲得することになり、一般にこれは 1 とは異なる位相因子です。この位相因子は連続変形の範囲で経路に依存せず、交換したエニオンの種類だけで決まる因子で、**ブレイディング（*braiding*）**と呼ばれています。あるいは、巻きつきの操作のことを広くブレイディングと呼ぶこともあります。

一方で、エニオンのおかれた位置は、もとの波動関数 $\Psi_{\text{anyon}}(\eta_1, \eta_2)$ と 2 回 2 粒子の交換をした（すなわち、一方の粒子をもう一方の粒子の周りに一周させた）あとの波動関数 $e^{2o\alpha}\Psi_{\text{anyon}}(\eta_1, \eta_2)$ とでは同一です。したがって、エニオンの波動関数を指定するためには、エニオンの位置の情報だけでは不十分で、これまでどのようにブレイディングしてきたかという履歴の情報までもが必要になります。言い換えれば、2 つのエニオンを十分に遠ざけたとしても、その系の波動関数は過去のブレイディングを「記憶」しており、2 つのエニオンは量子的にもつれた状態にならざるを得ません。**長距離エンタングルメント（*long-range entanglement*）**と呼ばれるこの量子もつれは FQH の大きな特徴です。

特に断りのない限り、以下の議論では平坦な 2 次元面を仮定して話を進めることにします。

また、4.6 節で議論するように、非可換 FQH と呼ばれるクラスの FQH では、より高い Landau 準位の影響が重要になることがあります。ただし、高次の Landau 準位を含む系（$\nu = 2 + 1/2$ の Pfaffian 状態など）でも、4.6 節で議論する方法で LLL を部分的に埋めた FQH として理解することができます。したがって、以下では特に断りのない限り、LLL に限定して議論していると思ってください。

*3 以下では、一般にゲージ場 b のフラックスは磁束量子 2π を単位として数え、

$$\Phi = \frac{(\nabla \times \boldsymbol{b})_z}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\epsilon^{ij}\partial_i b_j \tag{2.4}$$

をフラックスの「本数」と呼ぶことにします。また、空間 2 次元の系を考えているため、上の表式で $(\cdots)_z$ はふつう省略します。

また、曲面が有限の種数をもつとき、非可縮なループに沿ってエニオンを動かしもとの位置で消滅させることで、トポロジカルに縮退した別の基底状態を得ることができます。一般に、Toric code 模型や FQH のように、長距離エンタングルメントをもち基底状態が縮退したギャップ相を一般に、**トポロジカル秩序相（*topological order phase*）**と呼びます。

また、エニオンには**フュージョン（*fusion*）**と呼ばれる、「統計性を合成する」構造が存在し、エニオンと特徴づけるもっともプリミティブな要素です。エニオンのブレイディングやフュージョンについての詳細は付録 A 章や付録 C で述べることにし、ここでは用語の紹介だけを行いました。

ポイント　2

FQH には分数電荷・分数統計をもったエニオン励起が存在し、フュージョン・ブレイディングの構造をもつ。

2.3.2　励起と FQH の安定性

前節では FQH でエニオンが存在することを説明しましたが、以下では、電子と同じ（逆の）電荷をもつエニオンのうち、電荷の絶対値がもっとも小さいものを特に**準粒子（準正孔）**励起と呼ぶことにします。準粒子や準正孔は、系の外部から電子をドープしたり、FQH を保ったまま磁場を変化させたりすることで励起できますが、こうした外部からの操作なしで存在できる電気的に中性な FQH の励起には、以下の 2 種類があります。

1 つ目は、同じレベルのランダウ準位に属する準粒子と準正孔のペアの励起で、**磁気ロトン（*magneto-roton*）**と呼ばれます。磁気ロトンの励起ギャップは Coulomb 力に依存し、準粒子・準正孔の電荷が大きくなるほど励起ギャップは大きくなります。図 2（左）に FQH の典型的な励起スペクトラムを示しましたが、磁気ロトンは分散関係の谷からの励起に対応します。

2 つ目は、電子集団の重心自体が外場のもとでサイクロトロン振動を行うようなモードで、これは **Kohn モード（*Kohn mode*）**と呼ばれます。多電子系のハミルトニアンは、相対運動と重心運動に完全に分離することができ、そのうち重心運動の部分はあたかも単一の荷電粒子であるかのように外場に対して応答します [Kohn, 1961]。その結果、磁場に対してこの「単一の荷電粒子」はサイクロトロン振動を起こし、サイクロトロン振動数だけの励起ギャップをもった励起として観測されます。FQH が実現するような強磁場下では、Kohn モードのギャップは磁気ロトンに比べて十分に大きいため、通常は磁気ロトンだけを考えます。Kohn モードは長波長（$k \to 0$）領域で実現するモードで、図 2（左）で曲線と縦軸の交わる点が、ちょうど Kohn モードの励起エネルギーであるサイクロトロン振動数になっています。

磁気ロトンの励起ギャップが大きくなると、FQH はより安定になります。FQH のフィリングを $\nu = p/q$ とすると、磁気ロトンの励起ギャップは準粒子の電荷、すなわち $1/q$ におおむね比例するため、フィリングの分母 q が小さいほど FQH はより安定になると言えます。そこで、フィリング p/q と $1/q$ を横軸と縦軸に取り、理論上予想されている（可換な）FQH 系をプロットしたものが図 2（右）です。

プロット点が一直線に並びグラフ全体がフラクタル的な構造をもっているのは、3.5 節などで紹介する FQH の階層構造の直接的な現れです。図 2（右）中、おおむね赤線より上の、分母がおよそ 17 より小さい FQH が観測済みであることが分かります。これは、赤線より下の、より大きい分母をもつ FQH は、磁気ロトンの励起ギャップが小さすぎるために観測が難しいことの現れであると理解できます。また、歴史上最初に発見された FQH が、フェルミオン系で実現する可換 FQH のうちもっとも小さい分母をもつ $\nu = 1/3$ の系であったことも、安定性の観点から納得できると思います。ちなみに、このグラフの直線に乗らない（非可換な）FQH も存在しており、非常に面白い拡張として以下の章で触れていきます。

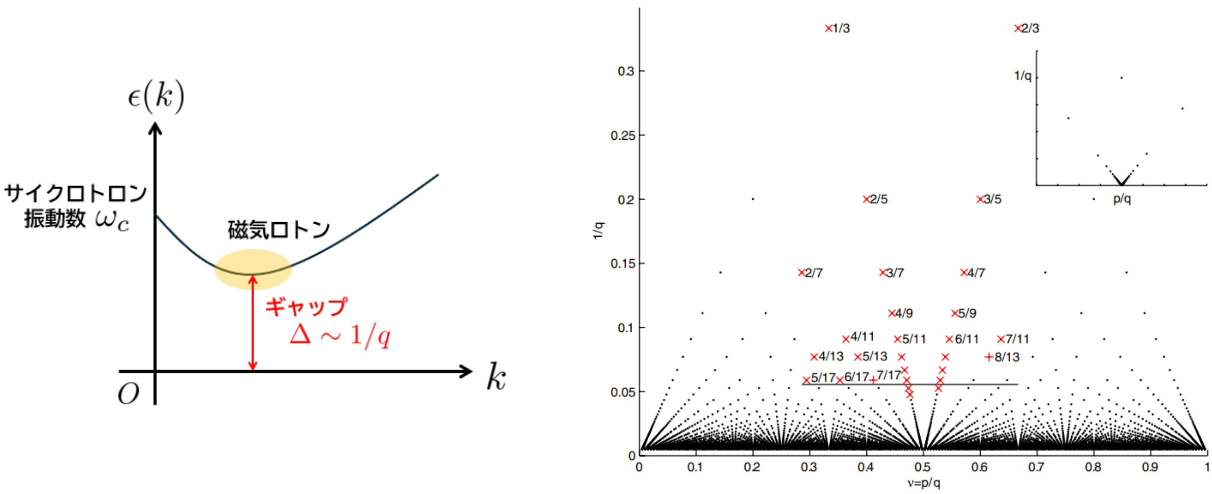


図 2　（左）FQH からの中性励起の典型的な分散関係。谷からの励起が磁気ロトン、長波長（$k \to 0$）での励起が Kohn モードに対応します。（右）可換 FQH をフィリングによってプロットしたもの。赤点で示したものは実験的に観測されているフィリングであり、分母の大きい領域に集中していることが分かります。これは、分母の大きい FQH に対しては、磁気ロトンの励起ギャップが大きく FQH 基底状態が安定して存在できることの現れです。図は [Bergholtz et al., 2007] からの引用。

ポイント　3

FQH の中性励起には磁気ロトン（準粒子と準正孔のペア）と Kohn モードがあるが、強磁場下で主に生じるのは磁気ロトン。フィリングの分母が小さく磁気ロトンのギャップ $\Delta \propto 1/q$ が大きい方が FQH は安定。

2.4　複合フェルミオン描像

さて、ここまで FQH の現象的な側面を概観してきました。「ホール伝導度が分数に量子化されたギャップ相が現れる」というのは実験で観測された事実なので揺るぎようがないのですが、何とも不思議な話です。少なくとも、電子間の Coulomb 相互作用から第一原理的にこのギャップ相の存在を示すのは、気の遠くなるくらい難しい問題だということは確かです。しかし、あるクラスの FQH に話を限定すれば、以下で見るような方法で IQH に帰着して理解できることが知られています。

2.4.1　粒子へのフラックス固着

これを見るための準備として、**フラックス固着（*Flux attachment*）**と呼ばれる手法を紹介します。

FQH は、EM 電荷 1 をもつ電子に対して、平面に垂直な磁束、すなわち EM 外場のフラックスが存在するような系でした。今、電子は EM 電荷 1 を持っているので、図 3（左）のように、EM フラックス n 本を囲むようにぐるりと一周すると、

$$e^{2\pi i n} \tag{2.7}$$

だけの **Aharanov-Bohm（AB）位相（*Aharanov-Bohm phase*）**を獲得します（付録 E を参照）。したがって、このプロセスを通して、電子が囲む EM フラックスが偶数本である限り、電子は実質フラックスを感じることができません（波動関数の位相が変化しません）。

ここで、トリッキーな仮定として、n 本の EM フラックスを 1 つの電子に「固着させる」ことを考えてみます。電子と EM フラックスからなるこの「複合粒子」を 2 つもってきて、図 3（右）のように場所を入れ替え

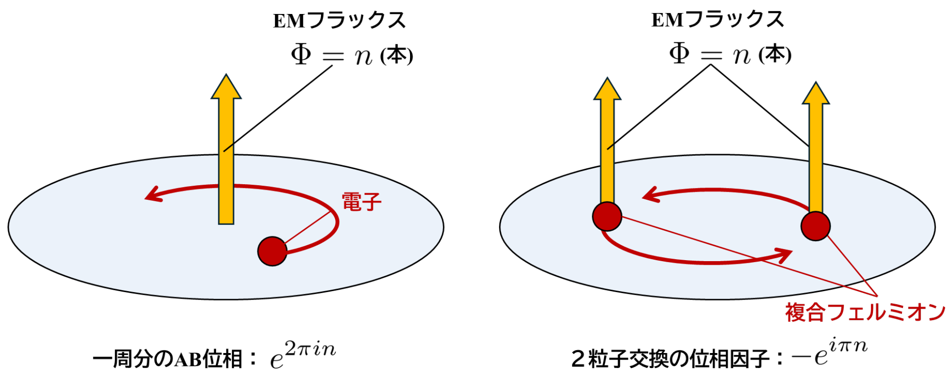


図 3　（左）EM フラックスの周りを EM 電荷が一周まわることによって誘起される AB 位相。（右）複合フェルミオン 2 個の交換によって誘起される位相因子。

るような操作を考えると、波動関数には

$$(-1) \times e^{i\pi(n+n)/2} = -e^{i\pi n} \tag{2.8}$$

だけの位相がつきます。ここに、(-1) の因子はもとの電子の統計性からの寄与、２つ目の因子は AB 位相からの寄与です。粒子 A の電荷と粒子 B のフラックス、粒子 B の電荷と粒子 A のフラックス、それぞれからの寄与が $e^{i\pi n}$ ずつありますが、これらが同一粒子であることから指数の肩を 2 で割っています（付録 A を参照)。

換言すれば、この「複合粒子」１つを単に 2π 回転させたとき、波動関数には $-e^{i\pi n}$ だけの位相が生じるわけです。もし n が偶数ならば、この「複合粒子」は入れ替え（あるいは 2π 回転）で -1 の位相を獲得するフェルミオンであり、反対に n が奇数ならばこの「複合粒子」はボゾンである、ということができます。このように、粒子とフラックスを固着した結果フェルミオン（ボゾン）となった粒子を、**複合フェルミオン（ボゾン）（*Composite fermion (boson)*）**と呼びます。

上の例では、フェルミオンに偶数（奇数）本のフラックスを固着してできる複合粒子はフェルミオン（ボゾン）でした。このように、奇数本のフラックスを固着することで、粒子の統計性を反転（ボゾン $\leftrightarrow$ フェルミオン）させることができます。一方で、偶数本のフラックスを固着しても、粒子の統計性は変わりません。

ポイント　4

粒子に奇数本のフラックスを固着させることによって、その統計性を反転することができる

2.4.2　具体例：Laughlin 状態

複合フェルミオンの考え方を、フィリング $\nu = 1/(2p+1)$（p は整数）をもった **Laughlin 状態（*Laughlin state*）**[Laughlin, 1983] と呼ばれる FQH に適用してみます。$\nu = 1/(2p+1)$ では、１つの電子に対して $(2p+1)$ 本の割合で EM 外場のフラックスが存在しています。そこで、仮定として、$(2p+1)$ 本の EM フラックスのうち、$2p$ 本を１つの電子に固着させた複合フェルミオンを考えます。このとき、偶数本のフラックス固着なので、粒子の統計性は反転しません。

この仮定のもとでは、１つの複合フェルミオンに対して 1 本の割合で EM 外場のフラックスが存在していることになり、これはフィリングが $\nu' = 1$ のフェルミオン系にほかなりません。したがって、図 4 のように、複合フェルミオンが LLL を完全に埋めることで $\nu' = 1$ の IQH を形成することができ、これによって系にはギャップが開きます。複合フェルミオンの埋めるランダウ準位を **Λ 準位（*Λ-level*）**と呼ぶことがありますが、こうして複合フェルミオンが Λ 準位を埋めることでできる IQH が、もとの電子の FQH の起源である、とするのが複合フェルミオン描像です。

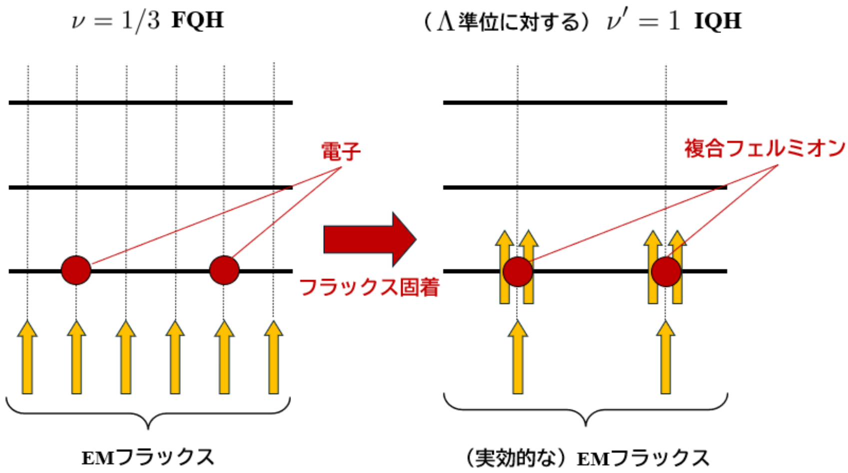


図 4　$\nu = 1/3$ の Laughlin 状態に対する、複合フェルミオン描像の模式図。点線は Landau 準位の縮退度を表しています。フラックス固着によって、$\nu = 1/3$ の FQH は、フラックスが 2 本固着された複合フェルミオンの $\nu' = 1$ の IQH として理解できます。

2.4.3　具体例：Jain 系列

次に、より一般の分数フィリング ν を考え、複合フェルミオンの描像がどれだけの種類の FQH をカバーできているのかを見ていきます。このとき、１つの電子に対して ν^{-1} 本の割合で EM 外場のフラックスがあります。そして、先ほどと同様に、電子の統計性を変えないように偶数（$2p$ とします）本の EM フラックスを電子に固着させた複合フェルミオンを考え、これが残りの EM フラックスの作る Λ 準位を n だけ埋めて $\nu' = n$ の IQH を形成すると仮定します。すなわち、複合フェルミオン１つにつき EM フラックスが $1/n$ 本存在すると仮定するわけです。ちなみにフィリングは負の値を取ることもでき、このときは逆向きのフラックスに対応しています。さあ、こうして複合フェルミオンの IQH が出来上がりました。

さて、この議論で得られるもとの FQH のフィリングを計算してみましょう。もとのフラックス密度 $B/(2\pi)$ は、電子の感じる有効的なフラックス密度 $B_{\text{eff}}/(2\pi)$ と電子に固着させたフラックス密度の和で与えられるので、電子密度を ρ_e として

$$\frac{B}{2\pi} = \frac{B_{\text{eff}}}{2\pi} + 2p\rho_e \tag{2.9}$$

となります。電子１つに対するフラックスの本数を数えると $\nu^{-1} = 1/n + 2p$ なので、フィリングは

$$\nu = \frac{n}{2pn+1} \ (p, n \in \mathbb{Z}) \tag{2.10}$$

と求められます。$n = 1$ とすると Laughlin 状態のフィリング $\nu = 1/(2p+1)$ に帰着し、したがってこの表式は Laughlin 状態の一般化になっています。(2.10) で、たとえば $p = 1$ と固定すると、$\nu = 1/3, 2/5, 3/7, \cdots \to 1/2$ のフィリングをもつ FQH の「系列」が得られます。複合フェルミオンの IQH に対応した、(2.10) の形のフィリングをもつ FQH のこの系列を、**Jain 系列（*Jain sequence*）**[Jain, 1989, 1990] と呼びます。歴史上最初に観測された $\nu = 1/3$ の FQH もこの Jain 系列に含まれており、2.2 節で見た図 2 中、$\nu = 1/3$ から $\nu = 1/2$ に向かって伸びるフィリングの列は、$p = 1$ の Jain 系列に対応する FQH です。また、その他にも直線上に並ぶフィリングの列が確認できますが、これらもいずれかの Jain 系列に対応しています。

ポイント 5

$\nu = n/(2pn+1)$ で表されるフィリングをもった FQH は、$2p$ 本フラックスを固着させた複合フェルミオンが形成する $\nu' = n$ の IQH として理解でき、これを **Jain 系列**と呼ぶ。また、$n=1$ のとき、これを **Laughlin 状態**と呼ぶ。

この章のまとめ

- FQH は 1981 年に発見された、分数のホール伝導度をもった、2 次元電子気体の非圧縮状態。長距離エンタングルメントをもち、分数統計をもったエニオン励起が存在する点が特徴。
- エニオンのフュージョンが単一のチャンネルだけをもつ場合には可換 FQH、、複数のチャンネルをもつときには非可換 FQH と呼ばれる。
- FQH がどんな分数フィリングにおいてどんな機構で現れるかは、可換 FQH の場合にはよく整理されているが、非可換 FQH の場合にはよく分かっていないことが多い。

3 Chern-Simons 理論による定式化

FQH を記述するための枠組みをこれから見ていくわけですが、本章ではその最初の定式化として、Chern-Simons 理論とよばれる TQFT を用いた方法を紹介します。はじめに、2 章で紹介したフラックス固着の描像を場の理論で扱う方法である Ginzburg-Landau-Chern-Simons 理論を紹介し、その双対描像として pure Chern-Simons 理論を導入します。

なお、以下では微分形式を使って議論を進めるので、2-form の EM カレント J_{EM}、1-form の EM 外場 A を使って (2.2) を

$$J_{\mathrm{EM}} = \frac{\sigma_H}{2\pi}\mathrm{d}A \qquad \text{すなわち、} \qquad J^{\mu}_{\mathrm{EM}} = \frac{\sigma_H}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda \tag{3.1}$$

と扱いやすい形に書き換えておきます。EM カレントはしばしば、ホッジスターを用いて $\star J_{\mathrm{EM}}$ が 2-form になるように定義されますが、本ノートではこれを J_{EM} に含め、2-form のカレントとして定義します。

この章のキーワード

- Chern-Simons 理論
- Ginzburg-Landau-Chern-Simons 理論
- Halperin-Lee-Read 状態
- パートン
- 階層性、K 行列
- Halperin の (mmn) 状態
- ユニタリモジュラーテンソル圏（UMTC）
- Moore-Read 状態、Read-Rezayi 系列

3.1 低エネルギー有効理論としての TQFT

素粒子理論と物性理論のもっとも大きな哲学の違いは何でしょうか。この問いに対する私の端的な答えは、くりこみ群フローのどちら側に興味があるかの違い、です。ある理論が与えられたとき、素粒子理論がくりこみ群フローの上流の物理に興味を持つのに対し、物性理論はその下流の物理に興味を持つ —— 少々ファジーな用語の使い方をしてしまいましたが、ここでいうくりこみ群フローとは単に、高エネルギー（Ultraviolet; UV）から低エネルギー（Infrared; IR）へ、ミクロからマクロへ、の理論の流れのことを漠然と指していると思ってください。すなわち、「上流」とは UV 側の理論のことで、「下流」とは IR 側の理論のことです。与えられた理論 A に対して、素粒子理論が「理論 A をその近似として再現するような、よりミクロな理論 B」を探すのに対し、物性理論は「理論 A から本質的な構造だけを抜き出した、よりマクロな理論 C」を探す、とい

うわけです。[*4] このときの理論 A に対する理論 C のような、よりマクロな（IR 側の）理論のことを、もとの理論の**低エネルギー有効理論（*Low energy effective theory*）**と呼びます。理論を粗視化して「ぼやかす」プロセスによって、私たちは IR 側の物理にアクセスできるわけです。

では、UV 側の理論さえ知っていれば、IR 側の理論のことをあえて知る必要はないのでしょうか。実は、低エネルギー有効理論を調べることで、逆説的にもとの理論のことがもっとよく分かるようになることがあります。

ウィルソン流のくりこみ群 [Bergholtz et al., 2007] では、あるエネルギースケール Λ よりも UV 側の自由度（場の高周波数成分など）をすべて積分して残った理論として、IR の理論を機械的に計算することができます。エネルギースケール Λ 以上の自由度をすべて積分する、とは、言い換えれば Λ 未満の励起ギャップをもつような励起だけを見る、ということです。ではここで、$\Lambda = 0$ として、場の自由度を豪快にすべて積分してしまうと、あとには何が残るでしょうか？系にギャップレスな励起があると、どれだけ IR 側に視点を移動してもこの励起が残ってしまうことになるので、系が励起ギャップをもつ場合に的を絞って考えてみます。

ナイーブには、あとには何も残らない、あるいは自明な真空だけが残る、と考えられます。しかし、もし系がトポロジカルに非自明ならば、すなわち、たとえば 2 章で見たようなエニオン励起のような構造があると、ダイナミカルな自由度をすべて積分しきったあとでも、トポロジカルに縮退した非自明な真空の理論が残ることがあります。もちろん、残った理論はこのエネルギースケールで励起を持たないので、ラグランジアン形式から正準形式に移行しようとすると、ハミルトニアンは自動的にゼロになるはずです。しかし、このゼロ・ハミルトニアンの場の理論が、あるときには熱輸送やホール伝導度といった具体的な物理量に有限の答えを与えることがあるのです。

このように、トポロジカルに縮退した真空を記述するような、ハミルトニアンがゼロの場の理論を、**位相的場の理論（*Topological quantum field theory; TQFT*）**と呼んでいます。この意味で、トポロジカルな性質を持った場の理論の究極の低エネルギー有効理論は、TQFT として記述されると言えます。このノートに登場する Chern-Simons 理論は、TQFT の一例です。TQFT は数学側からも盛んに研究されており、圏論と代数トポロジーの言葉を用いて厳密に定義することができます [Atiyah, 1988] が、本節では物理のレベルで、TQFT に対する一つの直観的な理解の方法を紹介しました。

ポイント　6

トポロジカルな縮退をもつ FQH 基底状態は、低エネルギー有効理論として TQFT で記述される。

3.2　整数量子ホール系

3.1 節は少々概念的な話になってしまいました。ここからは、量子ホール系の IR 領域を記述する具体的な TQFT を用いて議論していきましょう。

まず、ホール効果は、EM 外場 A に対する EM カレントの応答 (3.1) で特徴づけられるのでした。ここで、

[*4] この点に関して、某素粒子論研究者の方（匿名で記事を書かれているのでここでも名前は伏せます）が書かれた私の大好きな note 記事、『くりこみ群をくりこみ半群と呼ばない心』[理論物理学教程ファン, 2023] を紹介させてください。こちらの記事では、「くりこみ群は逆元を持たないから群ではないのに、なぜ群と呼ばれるのか？」という問いに対して、「素粒子物理学者はくりこみ群フローの上流を見ているから、群であってほしいという気持ちを込めて群と呼ぶのだ」という勇ましくも鋭い回答が論じられています。

また、物性の側からは、大野克嗣さん・田崎晴明さん・東島清さんという諸先生方が数理科学（1997 年 4 月号）に寄稿された、『くりこみ群の地平』[大野 et al., 1997] というエッセイ風の文章が、田崎さんのホームページに残っています。筆者の豊かな物理観・科学観を疑似体験できる、これまた大好きな記事です。「池に石ころを投げ入れたとき、石ころがどんな形であれ、どんな材質であれ、水面にはいつでも同心円状の波紋ができる。このように、ミクロな系の詳細によらない、マクロな現象を直接理解できないだろうか？……」と、くりこみ群フローの下流を見つめる心が論じられています。

どちらも非常に面白く教育的な記事なので、勝手ながら紹介させていただきました。

EM カレントは、ラグランジアンを EM 外場で微分した量として定義されます。

$$J_{\mathrm{EM}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}[A]}{\partial A} \tag{3.2}$$

ホール伝導度 σ_H は古典的には連続的な値を取りますが、量子効果が卓越する低温では離散的な値を取ります。電子間の相互作用を無視すれば、σ_H はフェルミオンが占有するバンドのチャーン数の合計で

$$\sigma_H = \sum_{i:\ \text{占有バンド}} C_i \tag{3.3}$$

のように与えられることが知られています。これは線形応答の久保公式から導出することができ、**TKNN 公式**（***Thouless-Kohmoto-Nightingale-Nijs formula***）[Thouless et al., 1982] と呼ばれています。ランダウ準位のチャーン数は $C = 1$ なので、磁場中の電子に対しては、σ_H は占有されたランダウ準位の数 n に一致することになります。

この (3.1) を再現する TQFT は、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{IQH}} = \frac{n}{4\pi} A\mathrm{d}A \tag{3.4}$$

のように、EM 外場についてのレベル n の **Chern-Simons 項**（***Chern-Simons term***）で与えられます（A は EM 外場で、ダイナミカルな場ではないので、厳密な意味での Chern-SImons 理論ではありません）。実際に A で微分すると、EM カレントの表式として (3.1) の表式が再現されていることが読み取れると思います。Chern-Simons 理論についての基礎事項は、付録 A を参照してください。

以上のことから、ホール伝導度が整数に量子化される理由を 2 通りで述べることができます。1 つ目は、系がギャップをもつときランダウ準位はちょうど整数個完全に占有されていなければならず、このとき TKNN 公式から占有された準位の個数にホール伝導度が等しくなるから、というものです。もう一つは、有効理論 (3.4) がゲージ不変であるためには、Chern-Simons・レベル n が整数でなくてはならないから、という TQFT のゲージ不変性からの要請です。また、フラックスの挿入を用いた「Laughlin の議論」と呼ばれる有名な思考実験 [Laughlin, 1981] があり、これについては付録 E で紹介しています。

3.3 Ginzburg-Landau-Chern-Simons 理論

2.4 節では、フラックス固着という考え方を用いて FQH を議論しました。では、フラックス固着の描像を具体的な場の理論の枠組みの中でどのように扱えばよいか、という重要な点にも触れておきます。

3.3.1 Chern-Simons 項によるフラックス固着

まず、「1 粒子にゲージ場 b のフラックスを m 本固着させる」とは正確にどういう意味なのかを明らかにしておきましょう。これは、複合フェルミオン（ボゾン）の粒子密度を $\rho(x)$ としたとき、演算子のレベルで

$$\rho(x) = \frac{1}{m}\frac{\nabla \times \boldsymbol{b}(x)}{2\pi} \tag{3.5}$$

の関係が成立すること、と言い換えられます。したがって、(3.5) をダイナミカルな自由度の運動方程式として再現するようなゲージ不変なラグランジアンを用意すれば十分です。実は、物質場に b の Chern-Simons 項を結合させるとこれを実現することができ、[Zhang et al., 1989] の中で初めて提案された[*5]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi, -b] + \frac{1}{4m\pi} b\mathrm{d}b \tag{3.6}$$

[*5] 物質場に Chern-Simons 項を結合させると粒子の統計性が変わるというアイデア自体は以前 ([Pisarski and Rao, 1985; Wilczek and Zee, 1983] など）からありましたが、分数量子ホール系の複合フェルミオンの文脈でこれを議論したのは [Zhang et al., 1989] が初めてです。

にほかなりません。ここで、$\mathcal{L}[\phi, -b]$ は物質場 ϕ とゲージ場 $-b$ の結合項であり、非相対論的な場合には、ボゾンとフェルミオンそれぞれに対して

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{boson}}[\phi, -b] &= \phi^\dagger i(\partial_0 + ib_0 - i\mu)\phi + \frac{1}{2m^\star}\left|(\partial_i + ib_i)\phi\right|^2 \\ \mathcal{L}_{\text{fermion}}[\psi, -b] &= \psi^\dagger i(\partial_0 + ib_0 - i\mu)\psi + \frac{1}{2m^\star}\psi^\dagger(\partial_i + ib_i)^2\psi\end{aligned} \tag{3.7}$$

のように与えられるとします。

ダイナミカルなゲージ場の 0 成分 b_0 についての運動方程式を取ると、

$$\frac{\partial \mathcal{L}[\phi, -b]}{\partial b_0} = -\rho_\phi \tag{3.8}$$

などを用いて、たしかに (3.5) が再現されていることを確かめることができます。

補足として、Chern-Simons 項 $(1/4m\pi)bdb$ は、レベルが整数でないのでゲージ不変になっていないことに注意が必要です。この書き方は、別のダイナミカルな U(1) ゲージ場 c を含んだ

$$-\frac{m}{4\pi}cdc + \frac{1}{2\pi}cdb \tag{3.9}$$

という項の略記であると了解してください。実際、c を積分する（運動方程式を求め、もとの項に代入しなおして c を消去する）と、$(1/4m\pi)bdb$ の項が形式的に得られます。$(1/4m\pi)bdb$ は便利なのでよく使用される表記ですが、あくまでも形式的な略記であると理解してください。

ポイント 7

m 本のフラックスを粒子に固着させるには、粒子に $-b$ を結合させ、Chern-Simons 項 $\mathcal{L}_{\text{CS}} = (1/4m\pi)bdb$ をくわえる。

3.3.2 具体例：Laughlin 状態

場の理論でフラックス固着を扱う応用の一つとして、$\nu = 1/m$（m は奇数）の Laughlin 状態を考えます。2.4 節では、$(m-1)$ 本のフラックスを電子に固着させた複合フェルミオンを考えて $\nu' = 1$ の IQH として扱いましたが、今度は m 本のフラックスを電子に固着させ、ゼロ磁場中の複合ボゾンとして GLCS 理論で扱う方法を考えてみましょう。

これを行うには、少々こみいった議論が必要です。まず、b をダイナミカルなゲージ場として、「EM フラックスの固着」を「b フラックスの固着＋ b フラックスと EM フラックスの打ち消し」と言い換えます。具体的にこの例で言えば、EM フラックスを m 本固着させる代わりに、まず b フラックスを m 本固着させて複合フェルミオンを作ります。その結果、この複合フェルミオンは既存の EM フラックス m 本に加えて、逆向きの b フラックス m 本を感じるようになりますが、これらの AB 位相への寄与は互いに打ち消しあい、実質複合ボゾンの感じるフラックスは消えます。

場の理論の観点では、まず b フラックスを m 本固着させるために Chern-Simons 項 $(1/4m\pi)bdb$ を導入して複合ボゾン場 ϕ に $-b$ を結合させます。

m は奇数なので、フラックス固着によって統計性が反転し、複合ボゾン ϕ となります。このとき、ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{ZHK}} = \mathcal{L}_{\text{boson}}[\phi, A - b] - V(|\phi|^2) + \frac{1}{4m\pi}bdb \tag{3.10}$$

となります。これは複合ボゾンを扱うプロトタイプ的な理論で、**Zhang-Hansson-Kivelson（ZHK）理論（*Zhang-Hansson-Kivelson theory*）**と呼ばれています [Zhang et al., 1989]。

[*6] 。次に、EM フラックスと b フラックスが打ち消すことから、フラックスの真空期待値についての以下のような仮定（アンザッツ；Ansatz）をおきます。

$$\frac{\langle \nabla \times \boldsymbol{b} \rangle}{2\pi} = \frac{\langle \nabla \times \boldsymbol{A} \rangle}{2\pi} \tag{3.11}$$

この仮定のもとで、ϕ の感じる $(A-b)$ のフラックスは真空において平均的に（すなわち、真空期待値が）ゼロとなり、最初に述べた描像が表現されました。

この理論がもとの与えられたフィリングを正しく再現していることを確かめます。b_0 の運動方程式から

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \frac{\nabla \times \boldsymbol{b}}{2\pi} \tag{3.12}$$

が得られますが、これと初めにおいたアンザッツを組み合わせると

$$\langle \rho_\phi \rangle = \frac{1}{2} \frac{\langle \nabla \times \boldsymbol{A} \rangle}{2\pi} \tag{3.13}$$

がしたがいます。また、電子密度は J_{EM} の第 0 成分なので $\rho_e = \partial \mathcal{L} / \partial A_0$ で定義されていましたが、これは電子密度と複合ボゾン密度の関係 $\rho_e = \rho_\phi$ を与えます。したがって、

$$\langle \rho_e \rangle = \frac{1}{2} \frac{\langle \nabla \times \boldsymbol{A} \rangle}{2\pi} \tag{3.14}$$

が得られ、私たちの考えてきたラグランジアンおよびアンザッツが、正しいフィリングを与えることが確かめられました。

このプロセスは、設定したアンザッツに対して理論全体の自己無撞着性を要請する、**平均場近似（*Mean-field approximation*）**の一種であるといえます。Chern-Simons 項を含むラグランジアンを設定しただけでは理論として不十分で、「どういう平均場を選ぶか？」というアンザッツまで含めて一個の複合フェルミオンの理論をなしている、という点に注意が必要です。ラグランジアンは、「フラックスがどのように固着されているか？」の情報しか与えないため、それにくわえて平均場の設定が必要なのです。

このアプローチはうまくいったかのように見える一方で、（複合フェルミオン（ボゾン）描像に一般に言えることとして）平均場近似を超えた議論をすることが大変難しいという理論的なデメリットがあります。また、2 章で少し議論したように、本来 IR での励起の構造は UV での情報に依存せず（少なくとも、強磁場の極限では）決まるはずですが、(3.10) の物質場の部分には、UV での電子の裸のバンド質量 m_e が含まれています。これは物理的に奇妙であり、適切な近似をすれば UV のパラメータによらない IR の有効理論が得られると期待されている一方で、まだ妥当な回答は得られていません [Hansson et al., 2017]。

3.3.3 FQH の非対角長距離秩序

ここまで、Laughlin 状態をゼロ磁場中の複合ボゾンとして記述してきましたが、ゼロ磁場でのボゾンは一般に、低温領域でボーズ・アインシュタイン凝縮して超流動相（$\langle \phi \rangle \neq 0$）となります。このとき、複合ボゾンに結合したゲージ場は南部・Goldstone ボゾンを通じて Higgs 機構によって質量を獲得するので、(3.10) のスペクトラムには低温領域でギャップが開きます。これが非圧縮な FQH ギャップの起源である、とするのが ZHK 理論の基本的な描像です。

通常の Ginzburg-Landau 理論の議論と同様に、ボゾンの理論がどんな相にあるかは同時刻での**一体密度行列（*one-body density matrix*）**

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \equiv \left\langle \phi^\dagger(\boldsymbol{x}) \phi(\boldsymbol{x}') \right\rangle \tag{3.15}$$

[*6] 正確には、電荷・統計対応（参照：付録 A）から、ボゾニックな自由度と結合した $A-b$ が通常の U(1) ゲージ場となるように b は Spin_C 接続に取るべきです。

の長距離でのふるまいで識別できます。FQH に対応する ZHK 理論のギャップレス相では、一体密度行列に長距離で有限の寄与が残り、

$$\lim_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\to\infty} \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \rho_0(\neq 0) \tag{3.16}$$

となることが期待されます。密度行列の非対角成分（$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$）に現れるこのようなふるまいは一般に**非対角長距離秩序（ODLRO）（*off-diagonal long-range order*）**と呼ばれ[*7]、FQH の文脈では [Girvin and MacDonald, 1987; Read, 1989] で初めて議論されました。複合ボゾンの一体密度行列は Laughlin 状態のオーダーパラメータになっており、その実現は ODLRO の有無で判別されます。

ポイント　8

Laughlin 状態は、ZHK 理論では複合ボゾンのギャップレス相に対応し、一体密度行列 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \langle \phi^\dagger(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}')\rangle$ がよいオーダーパラメータとなる。

3.3.4　具体例：Halperin-Lee-Read 状態

次に、FQH ではない、$\nu = 1/2$ のフェルミオン系を考えましょう。この系では、電子 1 つに対して 2 本の EM フラックスが存在しているので、この 2 本の EM フラックスをすべて電子に固着させて複合フェルミオン ψ を作ります。

このとき、平均場近似の範囲内では複合フェルミオンが感じる有効的なフラックスは消失するため、複合フェルミオンはフェルミ面を形成します。しかし、ZHK 理論での複合ボゾン (3.10) とは異なり、この複合フェルミオンは凝縮しないため、ゲージ場のゆらぎは Higgs 機構によって抑制されず、ギャップレスのまま残ります。この激しくゆらぐゲージ場との強い相互作用により、複合フェルミオンは単純な自由粒子（フェルミ液体）としてはふるまわず、**非フェルミ液体（*Non-Fermi liquid*）**、または**複合フェルミ液体（*Composite Fermi liquid*）**と呼ばれる特異な金属状態となります。この $\nu = 1/2$ フェルミオン系で現れるギャップレスな状態は **Halperin-Lee-Read（HLR）状態（*Halperin-Lee-Read state*）**とよばれています [Halperin et al., 1993]。

この描像は、Chern-Simons 項を用いた場の理論で

$$\mathcal{L}_{\text{HLR}} = \mathcal{L}_{\text{fermion}}[\psi, A-b] + \frac{1}{8\pi} b\mathrm{d}b \tag{3.18}$$

のように表せ[*8]、アンザッツ (3.11) をおくことで平均的にフラックスを感じない複合フェルミオンとして扱うことができます。

以上で見てきた ZHK 理論 (3.10) や HLR 状態の理論 (3.18) のように、平均的にフラックスを感じない複合フェルミオン（ボゾン）を用いて磁場中の電子のダイナミクスを記述する枠組みを、一般に **Ginzburg-Landau-Chern-Simons（GLCS）理論（*Ginzburg-Landau-Chern-Simons theory*）**とよびます。

[*7] より正確に言えば、2 次元では Marmin-Wagner の定理から連続対称性は自発的に破れないので、2 次元で許されるもっとも長距離的なべき相関

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \propto \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{1/2\nu}} \tag{3.17}$$

となります。

[*8] HLR 状態のをこのラグランジアンで扱うことの問題点の一つは、$\nu = 1/2$ で期待される粒子・正孔対称性があらわに見えないことです。この問題は、非相対論的なフェルミオンの代わりに相対論的な Dirac フェルミオンを利用することで解決できることが [Son, 2015] で提案されました。このラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\text{SD}} = \psi^\dagger i(D_0 + i\mu - v_D \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{\sigma})\psi + \frac{1}{8\pi}A\mathrm{d}A + \frac{1}{4\pi}a\mathrm{d}A \tag{3.19}$$

で $\nu = 1/2$ の状態を記述する枠組みは、**Son-Dirac 理論（*Son-Dirac theory*）**とよばれています。ただし、$D_\mu = \partial_\mu + ia_\mu$ としました。

ポイント　9

複合フェルミオン（ボゾン）が有効的にゼロ磁場下にある場合、複合ボゾンは低温で凝縮しギャップを獲得するが、複合フェルミオンはギャップレスのまま残り非フェルミ液体となる。

3.4　双対 Chern-Simons 理論による記述

ここまで、物質場と結合した GLCS 理論を FQH の場の理論として見てきましたが、IR での線形応答を記述するだけであれば、物質場を積分した Chern-Simons 理論（しばしば **pure Chern-Simons 理論**と呼ばれます）だけで用が済んでしまいます。FQH の有効理論としての pure Chern-Simons 理論は、上で見た GLCS 理論の双対変換の結果として見ることができます。

3.4.1　複合ボゾンの渦糸と双対描像

まず、$\nu = 1/m$ の Laughlin 状態に対する複合ボゾンの ZHK 理論 (3.10) から始めます。3.3 節で見たように、Laughlin 状態は ZHK 理論のギャップレス相（$\langle\phi\rangle \neq 0$）に相当するのでした。この相では、U(1) 対称性は自発的に破れており、系には ϕ の位相が非自明に巻きついた渦糸 $\tilde{\phi}$ が存在できます。実はこの ϕ の渦糸 $\tilde{\phi}$ は以下で見るように、Laughlin 状態からの分数電荷をもったエニオン励起に対応しています。このことから、FQH を記述するには、複合ボゾン ϕ よりもむしろ渦糸 $\tilde{\phi}$ を基本的な自由度とする場の理論を扱った方が都合がよいのです。

そこで、(3.10) を、$\tilde{\phi}$ を基本的な自由度とする等価な場の理論に書き換えることを考えましょう[*9]。これは、３次元場の理論に存在する**粒子・渦糸双対性（*Particle-vortex duality*）**という性質を用いることで自然に達成できます。この双対性の詳細は付録 A を参照してください。粒子・渦糸双対性は、複素スカラー場 ϕ の理論をその渦糸 $\tilde{\phi}$ を基本場とする等価な場の理論に

$$\mathcal{L}_{\text{boson}}[\phi, A] - V(|\phi|^2) \longleftrightarrow \mathcal{L}_{\text{boson}}[\tilde{\phi}, \alpha] - V(|\tilde{\phi}|^2) + \frac{1}{2\pi}\alpha \mathrm{d}A \tag{3.20}$$

のように書き換える双対性です。このとき、「副産物」として **BF 項（*BF term*）**と呼ばれる Chern-Simons 的な結合項が現れ、これが FQH の基底状態を記述する TQFT となります。より正確に言えば、こうして書き換えることのできる両辺の理論は、ともに Wilson-Fisher（WF）固定点にあるとしており、粒子・渦糸双対は 2 つの理論の固定点同士の間が同じ物理を記述するという性質です。そして、WF 固定点からの摂動であるボゾンの質量項も

$$-m^2|\phi|^2 \longleftrightarrow +\tilde{m}^2|\tilde{\phi}|^2 \tag{3.21}$$

のように符号が反転するように写像されます。その結果、一方でのギャップ相（$\langle\phi\rangle = 0$）はもう一方でのギャップレス相（$\left\langle\tilde{\phi}\right\rangle \neq 0$）に対応し、一方でのギャップレス相（$\langle\phi\rangle \neq 0$）はもう一方でのギャップ相（$\left\langle\tilde{\phi}\right\rangle = 0$）に対応することになります。

粒子・渦糸双対 (3.20) を (3.10) に適用すると、

$$\mathcal{L}_{\text{GLCS-dual}} = \mathcal{L}_{\text{boson}}[\tilde{\phi}, \alpha] - V(|\tilde{\phi}|^2) + \frac{1}{2\pi}\alpha\, \mathrm{d}(A - b) + \frac{1}{4m\pi} b\mathrm{d}b \tag{3.22}$$

という双対なラグランジアンが得られます。もとの場 ϕ がギャップレス相（$\langle\phi\rangle \neq 0$）にあったことと呼応して、それと双対な渦糸場 $\tilde{\phi}$ はギャップ相（$\left\langle\tilde{\phi}\right\rangle = 0$）にあります。ここでダイナミカルなゲージ場 b を積分すると、

$$\mathcal{L}_{\text{GLCS-dual}} = \mathcal{L}_{\text{boson}}[\tilde{\phi}, \alpha] - V(|\tilde{\phi}|^2) - \frac{m}{4\pi}\alpha \mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2\pi}\alpha \mathrm{d}A \tag{3.23}$$

[*9] 渦糸がエニオンに対応するという物理的な描像もさることながら、物質場を積分するにはギャップが開いていなくてはいけないという場の理論の技術的な理由からも、粒子・渦糸双対で双対描像に移ることは自然です。

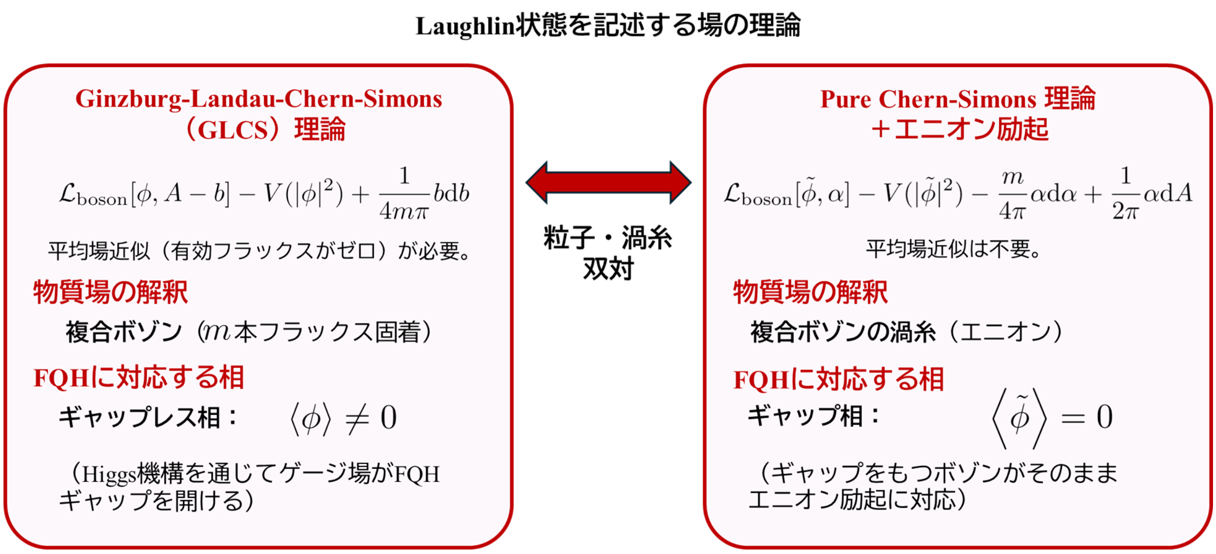


図 5　$\nu = 1/m$ の Laughlin 状態を記述する場の理論。粒子・渦糸双対で結ばれた GLCS 理論と pure Chern-Simons 理論という 2 つの理論があり、いずれも異なる描像で同じ相を記述している。

という、TQFT と結合したボゾン場の理論が得られます。このラグランジアンは (3.10) と見た目こそ似ているものの、その物理的な意味はまったく異なることに注意してください。ϕ は複合ボゾン、平たく言えば電子の物質場であり、そのギャップレス相が FQH に対応していた一方で、$\tilde{\phi}$ は FQH の基底状態からのエニオン励起の場であり、FQH に対応するのはそのギャップ相です。こうして、粒子・渦糸双対性が同じ Laughlin 状態を異なる側面から見る有効な方法であることが理解できました。

さて、上で述べたようにこの渦糸場 $\tilde{\phi}$ がエニオン励起を与えることになるのですが、まずは基底状態の TQFT を考えたいので、深い IR 領域を見てこの励起の存在を一旦忘れることにしましょう。これは、$\tilde{\phi}$ を単純にその真空期待値で置き換えて

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{m}{4\pi}\alpha\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2\pi}\alpha\mathrm{d}A \tag{3.24}$$

とすることで達成できます。ずいぶん遠回りをしてきましたが、この $\mathrm{U}(1)_m$ Chern-Simons 理論が $\nu = 1/m$ の Laughlin 状態の IR 領域を記述する TQFT になっています。実際、α を積分すると形式的に $\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = (\nu/4\pi)A\mathrm{d}A$ が得られ、分数のホール伝導度を記述していることが分かります。

Laughlin 状態の有効理論に関するここまでの議論を図 5 にまとめました。

ポイント　10

$\nu = 1/m$ の Laughlin 状態の IR 領域を記述する TQFT は $\mathrm{U}(1)_m$ Chern-Simons 理論

3.4.2　Laughlin 状態のエニオン励起

さて、次にこの基底状態からの励起を考えてみましょう。前の節の最後では基底状態を見ようとして IR 領域の TQFT(3.24) を得たので、この理論にはもはや有限のエネルギーをもつ励起はありませんが、少しだけ UV に戻って (3.23) の「残り香」を感じることにしましょう。簡単のために、エニオン励起の場とゲージ場の結合項 $\mathcal{L}_{\mathrm{boson}}[\tilde{\phi}, \alpha] - V(|\tilde{\phi}|^2)$ を単に、エニオン励起 $\boldsymbol{a}$ に対応したカレント $j_{\boldsymbol{a}}$ の結合項として

$$\Delta\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \alpha \wedge j_{\boldsymbol{a}} \tag{3.25}$$

と略記することにします。なお、渦糸場 $\tilde{\phi}$ が α 電荷 1 をもっていたので、同じく α 電荷 1 をもつ励起として $j_{\boldsymbol{a}}$ を導入しましたが、より大きい電荷 q をもつ励起を $q\alpha \wedge j$ のように導入することもできます。

では、$\boldsymbol{a}$ の統計性と EM 電荷を求めてみます。統計性を求める一つの方法として、$\boldsymbol{a}$ のもつゲージ場の電荷と $\boldsymbol{a}$ への固着フラックスの組を知り、そこから AB 位相を計算する方法があります。まず、$\boldsymbol{a}$ は α 電荷 1 をもちますが、同時に α のフラックスが $1/m$ 本固着されています。このことは、$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L}_{\text{int}}$ での α_0 の運動方程式

$$j_0 - \frac{m}{2\pi}\nabla \times \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2\pi}\nabla \times \boldsymbol{A} = 0 \quad \text{すなわち、} \quad \frac{\nabla \times \boldsymbol{\alpha}}{2\pi} = \frac{1}{m}j_0 + \frac{\nabla \times \boldsymbol{A}}{2\pi m} \tag{3.26}$$

から読み取れます[*10]。したがって、$\boldsymbol{a}$ を 2 つ用意して入れ替えると（あるいは、1 つの $\boldsymbol{a}$ を 2π 回転させると）

$$\theta_{\boldsymbol{a}} = e^{i\pi/m} \tag{3.27}$$

だけの AB 位相が生じます。以下では、TQFT での用語の使い方に合わせて、粒子の 2π 回転から生じる $\theta_{\boldsymbol{a}}$ のような位相を、**ツイスト（*twist*）**と呼ぶことにします。

また、EM カレントは (3.2) で定義されていたので、$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L}_{\text{int}}$ に対しては

$$J_{\text{EM},0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} = \frac{\nabla \times \boldsymbol{\alpha}}{2\pi} \tag{3.28}$$

となり、α フラックス 1 本と EM 電荷 1 がつねに帯同していると言えます。したがって、α フラックス $1/m$ 本をもつ $\boldsymbol{a}$ の EM 電荷は、

$$Q_{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{m} \tag{3.29}$$

です。なお、このことは逆に「α 電荷 1 をもつ粒子は、EM 電荷 1 をもつ電子を 1 本の α フラックスとして感じる」と言い換えることもでき、この節の上で議論した「エニオン励起は物質場の渦糸である」という描像と合致しています。この視点は、あとの 4.4 節で、エニオン励起があるときの電子の波動関数を考えるときに特に重要になります。

以上の議論は α 電荷 q をもつエニオン $\boldsymbol{a}^q$ にもただちに一般化でき、ツイストと EM 電荷はそれぞれ

$$\theta_{\boldsymbol{a}^q} = e^{i\pi q^2/m}, \quad Q_{\boldsymbol{a}^q} = \frac{q}{m} \tag{3.30}$$

で与えられます。$q = m$ とするとこれは電子の励起であり、$\theta_{\boldsymbol{a}^m} = e^{i\pi m}, Q_{\boldsymbol{a}^m} = 1$ のツイストと EM 電荷をもちます。したがって、フェルミオン（ボゾン）の系では、基本的な自由度の励起を再現するように、m は奇数（偶数）でなくてはなりません。これは、複合フェルミオン（ボゾン）描像の結果を再現する事実になっています。

ポイント 11

Laughlin 状態の励起 $\Delta\mathcal{L}_{\text{int}} = q\alpha \wedge j$ は、ツイスト $\theta = e^{i\pi q^2/m}$ と EM 電荷 $Q = q/m$ をもつ。

3.5 Wen-Zee の有効 Chern-Simons 理論

Pure Chern-Simons 理論 (3.24) を用いる利点の一つは、FQH の**階層性（*hierarchy*）**とよばれる構造が見通し良く記述できる点にあります。以下では、この階層性の構造を Chern-Simons 理論の枠組みで系統的に扱う方法を紹介します。

[*10] なお、j と A は今いずれも与えられた外場だったので、α の運動方程式は j と A から α を決める式になっていることに注意が必要です。すなわち、「$j_0 = \cdots - (\nabla \times \boldsymbol{A})/(2\pi)$ だからエニオン j には EM 外場のフラックスが 1 本固着している……」のような議論は誤りです。具体的には、1 点に局在したエニオン密度 $j_0(x) \propto \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ などを想定すると理解しやすいでしょう。

3.5.1 階層性と K 行列の方法

(3.24) の導出をする際に出発点となっていたのは、EM 外場 A と最小結合した物質場のラグランジアンだったのでした。これは、物質場のカレントを j_ψ とすると、$\mathcal{L}=A\wedge j_\psi$ のように書くことができます。ここから、EM 外場のもとで $\nu=1/m$ の Laughlin 状態を形成すると仮定し、外場 A と結合した Chern-Simons 理論を得たのでした。すなわち、標語的に、「カレント j が外場 B のもとで $\nu=1/m$ の Laughlin 状態をなすとき、有効理論は

$$\mathcal{L}=B\wedge j\longmapsto -\frac{m}{4\pi}\alpha\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{2\pi}\alpha\mathrm{d}B \tag{3.31}$$

となる」と一般に述べることができます。さて、今、をもつエニオン励起 j_{anyon} はダイナミカルなゲージ場 α を感じているので、これをあたかも外場のように扱うことができます。このとき、「Laughlin 状態からのエニオン励起がさらに $\nu=1/\tilde{m}$ の Laughlin 状態をなす」という描像は、結合項 $\mathcal{L}_{\text{int}}=\alpha\wedge j_{\text{anyon}}$

$$\mathcal{L}_{\text{int}}=-\frac{\tilde{m}}{4\pi}\alpha'\mathrm{d}\alpha'+\frac{1}{2\pi}\alpha'\mathrm{d}\alpha \tag{3.32}$$

と置き換えることで達成できます[*11]。これを具体的に見てみましょう。

カレント j_{anyon} との結合を含めた $\nu=1/p_0$ の Laughlin 状態のラグランジアン

$$\mathcal{L}_0=-\frac{p_0}{4\pi}\alpha\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{2\pi}\alpha\mathrm{d}A+\alpha\wedge j_{\text{anyon}} \tag{3.33}$$

に対して、「エニオンがさらに $\nu=1/p_1$ の Laughlin 状態をなす」と仮定して、上で述べたような置き換えをしてみましょう。この置き換えによって、新たなラグランジアン

$$\mathcal{L}_1=-\frac{p_0}{4\pi}\alpha\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{2\pi}\alpha\mathrm{d}A-\frac{p_1}{4\pi}\tilde{\alpha}\mathrm{d}\tilde{\alpha}+\frac{1}{2\pi}\tilde{\alpha}\mathrm{d}\alpha \tag{3.34}$$

を得ることができます。ちなみに、$\mathcal{L}_{\text{int}}=\alpha\wedge j_{\text{anyon}}$ の形の最小結合では、α の電荷 1 の励起を表しています。電荷が逆の準粒子励起を考えるときには $-\alpha\wedge j_{\text{anyon}}$ とし、一般により高い電荷 q をもった励起を考えるときには $q\alpha\wedge j_{\text{anyon}}$ とすれば達成できます。

さらに続けて、新たに得た (3.34) からの励起 $\tilde{\alpha}\wedge j_{\text{anyon},2}$ がさらに $\nu=1/p_2$ の Laughlin 状態を形成し、そこからの励起がさらに $\nu=1/p_3$ の Laughlin 状態を形成する……とこのプロセスを続けていくと、最終的に得られるラグランジアンは

$$\mathcal{L}_n=-\frac{1}{4\pi}K_{ij}\alpha_i\mathrm{d}\alpha_j+\frac{1}{2\pi}t_i\alpha_i\mathrm{d}A \tag{3.35}$$

のようになります。ここで、**K 行列（*K-matrix*）**(K_{ij})、および **t ベクトル（*t -vector*）**（あるいは、**電荷ベクトル（*charge vector*）**）(t_i) は、この場合

$$K=\begin{bmatrix} p_0 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & p_1 & -1 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & p_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_N \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{t}=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \tag{3.36}$$

のように定義されます。一般に、K 行列と t ベクトルを含む (3.35) の形のラグランジアンを、**Wen-Zee 有効ラグランジアン（*Wen-Zee effective Lagrangian*）**と呼びます[*12]。また、ある FQH から生じたエニ

[*11] ただし、ダイナミカルなゲージ場を本当に外場のように扱ってよいかはナイーブな問題です。むしろ、この置き換えは「エニオン励起の存在によってゲージ場が受ける影響、またそれによってエニオン励起が逆に受ける影響、それによってゲージ場がさらに受ける影響、……をすべて含めた物理的に実現する最終的な結果が、この場の理論で記述できるはずである」という平均場近似として理解するべきでしょう。

[*12] より一般には、スピン接続 ω とダイナミカルなゲージ場との結合項

$$\frac{s_I}{2\pi}\omega\mathrm{d}\alpha_I \tag{3.37}$$

オン励起によってさらに次の FQH を作るという手続きを行うとき、一般にもとの FQH を**親状態**（***parent state***）、階層性のプロセスを踏んで作られた新しい FQH を**娘状態**（***daughter state***）と呼びます。

(3.35) で記述される FQH のフィリングを計算しておきます。これは、ダイナミカルなゲージ場 $\{\alpha_i\}$ をすべて積分して、残った A の形式的な Chern-Simons 項の係数を読み取ることで、系のホール伝導度として得られます。α_i の運動方程式

$$-\frac{1}{2\pi}K_{ij}\mathrm{d}\alpha_j+\frac{1}{2\pi}t_i\mathrm{d}A=0 \qquad \text{すなわち、} \qquad \mathrm{d}\alpha_i=(K^{-1})_{ij}t_j\mathrm{d}A \tag{3.38}$$

をもとのラグランジアンに代入して整理すると、形式的な有効理論

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}}=\frac{t_i(K^{-1})_{ij}t_j}{4\pi}A\mathrm{d}A \tag{3.39}$$

が得られ、ここから

$$\nu=t_i(K^{-1})_{ij}t_j=\boldsymbol{t}^{\top}K^{-1}\boldsymbol{t} \tag{3.40}$$

が求められます。特に、(3.36) の形の K 行列に対しては、

$$\nu=\cfrac{1}{p_0-\cfrac{1}{p_1-\cfrac{1}{p_2-\cfrac{1}{\ddots-\cfrac{1}{p_N}}}}} \tag{3.41}$$

のような、「階層性」の名にふさわしい連分数の形のフィリングが現れます。分母に生じる符号は、逆符号の電荷をもつ準正孔励起を考えたときには反転します。

また、基底状態の縮退度 (GSD) も、K 行列から読み取ることができ、これは FQH が定義されている 2 次元閉曲面の種数を g として

$$(\mathrm{GSD})=(\det K)^g \tag{3.42}$$

で与えられることが知られています [Wen, 1992]。

3.5.2 K 行列とエニオン励起

次に、Laughlin 状態でのエニオン励起の議論の一般化として、一般的なラグランジアン (3.35) において可能なエニオン励起のツイストと EM 電荷を計算してみましょう。

一般に、複数のダイナミカルなゲージ場の電荷をもつエニオン励起 $\boldsymbol{l}$ は $\Delta\mathcal{L}_{\mathrm{int}}=l_i\alpha_i\wedge j_{\boldsymbol{l}}$ のように書けます。$\boldsymbol{l}$ のツイストを求めるためには、$j_{\boldsymbol{l}}$ が結合したそれぞれのゲージ場について、$\boldsymbol{l}$ に固着されたフラックスの本数を求め、それぞれの電荷・フラックスの組から誘起される AB 位相の和を計算すれば達成できます。3.4 節で見た Laughlin 状態での議論と同様に、$\mathcal{L}=\mathcal{L}_n+\Delta\mathcal{L}_{\mathrm{int}}$ における $\alpha_{i,0}$ の運動方程式

$$l_ij_{\boldsymbol{l},0}-K_{ij}\frac{\nabla\times\boldsymbol{\alpha}_j}{2\pi}+t_i\frac{\nabla\times\boldsymbol{A}}{2\pi}=0 \quad \text{すなわち、} \quad \frac{\nabla\times\boldsymbol{\alpha}_i}{2\pi}=(K^{-1})_{ij}l_jj_{\boldsymbol{l},0}+(K^{-1})_{ij}t_j\frac{\nabla\times\boldsymbol{A}}{2\pi} \tag{3.43}$$

から、$\boldsymbol{l}$ に固着された α_i フラックスを $(K^{-1})_{ij}l_j$ 本と求めることができます。したがって、これらのフラックス固着から生じる合計の AB 位相として、$\boldsymbol{l}$ のツイスト

$$\theta_{\boldsymbol{l}}=\exp\left[i\pi l_i(K^{-1})_{ij}l_j\right]=e^{i\pi(\boldsymbol{l}^{\top}K^{-1}\boldsymbol{l})} \tag{3.44}$$

を含み、ゲージ場を積分した後の形式的な有効理論において、熱ホール効果に寄与する**重力チャーンサイモンズ項**（***gravitaional Chern-Simons term***）$\mathcal{L}_{\mathrm{grav}}\sim\omega\mathrm{d}\omega$ と、ホール粘性に寄与する **Wen-Zee 項**（***Wen-Zee term***）$\mathcal{L}_{\mathrm{WZ}}\sim\omega\mathrm{d}A$ の効果を与えます。ここに、スピン接続 ω はそのフラックスとしてスカラー曲率 $\mathcal{R}=\nabla\times\omega$ を与えるような 1-form ですが、平坦な 2 次元面での FQH ではこれらの効果は消滅するので、ここでは考えませんでした。詳細は 3.7 節を参照してください。

がしたがいます。また、

$$J_{\mathrm{EM},0}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_0}=t_i\frac{\nabla\times\boldsymbol{\alpha}_i}{2\pi} \tag{3.45}$$

から、α_i フラックス 1 本の固着につき t_i だけの EM 電荷を獲得することが読み取れるので、$\boldsymbol{l}$ のもつ合計の EM 電荷は、

$$Q_{\boldsymbol{l}}=t_i(K^{-1})_{ij}l_j=\boldsymbol{t}^\top K^{-1}\boldsymbol{l} \tag{3.46}$$

のように求められました。

ポイント　12

(3.35) で記述される FQH において、フィリング ν、および励起 $\Delta\mathcal{L}_{\mathrm{int}}=l_i\alpha_i\wedge j_{\boldsymbol{l}}$ のツイスト $\theta_{\boldsymbol{l}}$、EM 電荷 $Q_{\boldsymbol{l}}$ はそれぞれ、

$$\nu=\boldsymbol{t}^\top K^{-1}\boldsymbol{t},\quad \theta_{\boldsymbol{l}}=e^{i\pi(\boldsymbol{l}^\top K^{-1}\boldsymbol{l})},\quad Q_{\boldsymbol{l}}=\boldsymbol{t}^\top K^{-1}\boldsymbol{l} \tag{3.47}$$

で与えられる。

3.5.3　多フレーバー FQH

K 行列の方法は、上で見たように階層性を記述する便利な枠組みであるばかりでなく、スピンなどの別の自由度を含む FQH を記述する際にも威力を発揮します。例を挙げると、電子が上向きと下向きのスピンをもつ場合（これまでの議論では無視してきました）、電子が複数の重ね合わされたレイヤーに属し互いに相互作用している場合、バンド構造の中で複数種類の異なるバレー（谷）からの励起がある場合、などです。このノートでは、こうしたスピン自由度・レイヤー自由度・バレー自由度などをまとめて「フレーバー」と呼ぶことにします。

一般的なセットアップとして、N フレーバーの電子がそれぞれ $\{1/m_i\}_{i=1,2,\cdots,N}$ の Laughlin 状態（m_i：奇数）をなしているところに、フレーバー間相互作用を取り入れたような系を考えてみましょう。このとき、ゲージ不変なラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{multi-flavor}}=\sum_i\mathcal{L}_i-\sum_{i\neq j}\frac{n_{ij}}{2\pi}\alpha_i\mathrm{d}\alpha_j \tag{3.48}$$

という形をしているはずです。ここに、各フレーバーのラグランジアン $\mathcal{L}_i$ は

$$\mathcal{L}_i=-\frac{m_i}{4\pi}\alpha_i\mathrm{d}\alpha_i+\frac{1}{2\pi}\alpha_i\mathrm{d}A \tag{3.49}$$

で与えられます。したがって、K 行列および t ベクトルは、

$$K=\begin{bmatrix} m_1 & n_{12} & \cdots & n_{1N}\\ n_{21} & m_2 & \cdots & n_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n_{N1} & n_{N2} & \cdots & n_{NN}\end{bmatrix},\quad t=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} \tag{3.50}$$

のようになり、階層構造を考えていたときとは別の形の t ベクトルが得られました。

3.5.4　K 行列の $\mathrm{SL}(N,\mathbb{Z})$ 対称性

階層性を議論したとき (3.36) と多フレーバーの FQH を議論したとき (3.50) とで、異なる t ベクトルの表示が得られました。一方で、異なる K 行列が同一の FQH を表すことがあります。FQH の基底状態と励起の構

造は、フィリング (3.40)、基底状態の縮退度 (3.42)、励起のツイスト (3.44) および EM 電荷 (3.46) によって特徴づけられていたので、K 行列にはこれらの値を変えないような変換のもとでの冗長性があります[*13]。

実際、$W \in \mathrm{SL}(N,\mathbb{Z})$ に対して

$$K \longmapsto W^\top K W, \quad \boldsymbol{t} \longmapsto W^\top \boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{l} \longmapsto W^\top \boldsymbol{l} \tag{3.51}$$

のようにすると、観測量はすべて不変に保たれます。このことを、K 行列の **$\mathbf{SL}(\boldsymbol{N},\mathbb{Z})$ 対称性**（***$SL(N,\mathbb{Z})$ symmetry***）と呼びます [Read, 1990; Wen and Zee, 1992]。

Laughlin 状態から作られる階層構造を考えると自然に現れる (3.36) の形 $t = [1, 0, \cdots, 0]^\top$ の t ベクトルを**階層基底**（***hierarchical basis***）と呼び、また、多フレーバー FQH を考えたときに現れる (3.50) の形 $t = [1, 1, \cdots, 1]^\top$ の t ベクトルを**対称基底**（***symmetric basis***）と呼びます。対称基底での K 行列を K^s は、

$$W = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

を用いて、$K^h = W^\top K^s W$ のように階層基底での K 行列 K^h に書き換えることができます。

ポイント 13

K 行列の方法は、階層 FQH をその階層基底で、多フレーバー FQH をその対称基底でそれぞれ表すことができる。

3.5.5 具体例：Halperin の (mmn) 状態

多フレーバー FQH の一例として、スピンフルな（スピンをもった）電子によって作られる FQH を考えてみます。スピン上向きの電子と下向きの電子をそれぞれ異なるフレーバーをもったフェルミオンとして扱うことで、2 種類のゲージ場を使って有効理論を書くことができます。フレーバー間の結合項をゲージ不変になるようにとり、全体のラグランジアンを

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\uparrow,m_1} + \mathcal{L}_{\downarrow,m_2} + \frac{n}{2\pi}\alpha_\uparrow \mathrm{d}\alpha_\downarrow \tag{3.53}$$

とすると、この理論は対称基底での K 行列

$$K = \begin{bmatrix} m_1 & n \\ n & m_2 \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

で表されます。ここに、上向き（下向き）スピンの電子が $\nu = 1/m_1$（$\nu = 1/m_2$）の Laughlin 状態をなすとしました。この状態のフィリングは、(3.40) より、

$$\nu = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & n \\ n & m_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{m_1 + m_2 - 2n}{m_1 m_2 - n^2} \tag{3.55}$$

と求められます。

このような K 行列をもった状態は、**Halperin の $(\boldsymbol{m_1 m_2 n})$ 状態**（***Halperin's $(m_1 m_2 n)$ state***）と呼ばれています。$m_1 = m_2 = m$ とした $\nu = 2/(m+n)$ のクラスの FQH は重要で、たとえば $\nu = 1/2$ の (331) 状態などを含みます。$\nu = 1/2$ では粒子・正孔対称性が期待され、同じフィリングで実現する非可換 FQH（参照：**??**節）が多く存在することから、競合する状態の中でどの FQH がもっとも安定であるかが議論されています。(mmn) 状態については、4.2 節と 5.2 節で再び触れます。

[*13] 正確には、FQH の特徴づけには、ダイナミカルなゲージ場とスピン接続の結合項である Wen-Zee 項 $(s_I/2\pi)\omega \mathrm{d}\alpha_I$ の係数 s_I から決まるシフト S の値も必要です。詳細は 3.7 を参照してください。

3.6　Wilson ラインと統計

3.4 では、FQH 基底状態からのエニオン励起の統計性を計算する方法として、運動方程式から各ゲージ場についての電荷とフラックスを数え、AB 位相を合計する方法を紹介しました。以下では、エニオンの統計性を計算するもう少し一般化の効く方法として、Wilson ラインを使う方法に触れておきます。

3.6.1　ブレイディング

付録 A で紹介したように、エニオンの世界線は、Chern-Simons 理論のゲージ不変量である Wilson ラインによって表されます。したがって、時間発展に沿ってエニオンが絡むようなプロセスは、Wilson ラインの期待値として計算することができます。$U(1)_m$Chern-Simons 理論 (3.24) で、電荷 k_1, k_2 をもつ 2 つのエニオン a^{k_1}, a^{k_2} が互いに 1 周巻きつき、もとの位置に戻ってきたとすると、2 つのエニオンの世界線 Γ_1, Γ_2 は??のように絡んだ 2 つの Wilson ライン

$$W_{k_1}(\Gamma_1) = \exp\left[ik_1 \int_{\Gamma_1} \alpha\right], \quad W_{k_2}(\Gamma_2) = \exp\left[ik_2 \int_{\Gamma_2} \alpha\right] \tag{3.56}$$

表されます。ここで、2 本の Wilson ラインをトポロジカルに変形すると、静止したエニオンの世界線 $\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2$ と、$\tilde{\Gamma}_1$ のまわりを一周する $\tilde{\Gamma}$ に沿った Wilson ループにできます。

ここで、付録 A で見たように、Wilson ラインはそれを回るループに沿って

$$e^{i\int \alpha} W_{k_1}(\tilde{\Gamma}_1) = e^{2\pi i k_1/m} W_{k_1}(\tilde{\Gamma}_1) \tag{3.57}$$

だけのゲージ場のホロノミーを誘起するので、$W_{k_2}(\tilde{\Gamma}) = (e^{i\int \alpha})^{k_2}$ が感じるホロノミーは

$$W_{k_2}(\tilde{\Gamma}) W_{k_1}(\tilde{\Gamma}_1) = (e^{2\pi i k_1/m})^{k_2} W_{k_1}(\tilde{\Gamma}_1) = e^{2\pi i k_1 k_2/m} W_{k_1}(\tilde{\Gamma}_1) \tag{3.58}$$

のように計算することができます。これにより、エニオン a^{k_1}, a^{k_2} のブレイディング（参照：付録 C）が

$$B(a^{k_1}, a^{k_2}) = e^{2\pi i k_1 k_2/m} \tag{3.59}$$

のように計算できたことになります。

3.7　熱ホール効果

（準備中）

3.7.1　重力 Chern-Simons 理論

3.7.2　フレーミング・アノマリー

この章のまとめ

- 物質場に Chern-Simons 項を結合させ適切なアンザッツ（平均場）をおくことで、複合フェルミオン（ボゾン）のダイナミクスを記述することができる。
- FQH の IR 領域は、GLCS 理論による記述と、それと双対な pure Chern-Simons 理論による記述をもち、それらは互いに等価である。
- エニオンの世界線は Wilson ラインで表され、エニオンの統計性の情報は Wilson ラインの真空期待値として計算できる。

この章についてくわしく

- [Simon, 2023] は物理屋向けの UMTC・TQFT の現代的な教科書です。量子情報やトポロジカル物性への応用を念頭に、エニオン模型の話を網羅的に書いてくれています。分厚いですが図多めでスルスル読めてしまうので、前半だけでも一度通読しておくと幸せになれると思います。著者のホームページ上に同じタイトルの pdf（出版前バージョン）が落ちていますが、これは罠で、いくつか重要な章が抜けていたり演習問題がなかったりするので要注意です。
- [Bonderson, 2012] は P.H.Bonderson の博士論文で、Interferometry（エニオンを干渉させて AB 位相を直接測る実験的手法）に UMTC の言葉を使ってアプローチする際の基礎事項がよくまとまっています。また、5 章がエニオン模型のカタログのようになっていて、具体的な計算をする際に参照できて便利です。
- [Seiberg et al., 2016] は、3 次元場の理論の双対性とその物性理論への応用について網羅的にまとまったレビューです。3 次元場の理論には「双対性の網（duality web)」と呼ばれる構造があり、本章で扱った粒子・渦糸双対性はその基本的なパーツとなります。

4　波動関数による定式化

これまで、さまざまな FQH を場の理論の立場から整理し、IR での TQFT による記述を議論してきました。ここで、一旦頭を切り替えて、ミクロスコピックな電子の量子力学から FQH にアプローチしてみましょう。

この章のキーワード

- LLL 射影
- Jastrow 因子
- Haldane の擬ポテンシャル
- （波動関数の）モノドロミー
- Haldane-Halperin の議論
- パフィアン

4.1　ヒルベルト空間と波動関数の一般形

4.1.1　一体波動関数

まず、空間 2 次元に住む電子に垂直に磁場をかけた一体系の量子力学の問題から話を始めましょう。簡単のため、電子の質量 m、磁束密度 B はすべて 1 に取ることにします。このとき、系のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Pi}^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}))^2 \tag{4.1}$$

で与えられます。ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の具体的な表示として、対称ゲージ $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (1/2)[y, -x, 0]^\mathsf{T}$ を取っておきます。いま、複素座標 $z = x + iy$ を導入してハミルトニアンを少し変形すると、演算子 $a \equiv (z/2 + 2\bar{\partial})/\sqrt{2}$ を用いて

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2} \tag{4.2}$$

と書けます。ただし、∂ と $\bar{\partial}$ はそれぞれ、$\partial/\partial z$ と $\partial/\partial \bar{z}$ を略記したものです。$\partial^\dagger = -\bar{\partial}$ に注意すると、$\{a, a^\dagger\}$ は交換関係 $[a, a^\dagger] = 1$ を満たす、エネルギーの生成消滅演算子であることが分かります。

さて、次に、系の別の保存量について考えてみましょう。この系は z 軸周りに回転対称なので、z 軸方向の角運動量 L_z が保存します。したがって、ヒルベルト空間を H と L_z の同時固有状態で張ると便利そうです。そこで、角運動量

$$L_z = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\Pi})_z = x(p_y - A_y) - y(p_x - A_y) \tag{4.3}$$

を先ほどと同様に少し変形して複素座標で表すと、演算子 $b \equiv (z/2 - 2\bar{\partial})/\sqrt{2}$ を用いて

$$L_z = b^\dagger b - a^\dagger a \tag{4.4}$$

と書けます。$\{b, b^\dagger\}$ も同様に、交換関係 $[b, b^\dagger] = 1$ を満たす角運動量の生成消滅演算子です。

したがって、$|0,0\rangle$ を $a\,|0,0\rangle = b\,|0,0\rangle = 0$ を満たす a と b の真空とすると、ヒルベルト空間は

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}\,|0,0\rangle \oplus \left(\bigoplus_{n,m\in\mathbb{Z}_{>0}} \mathbb{C}\,|n,m\rangle\right) = \mathbb{C}\,|0,0\rangle \oplus \left(\bigoplus_{n,m\in\mathbb{Z}_{>0}} \mathbb{C}\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\frac{(b^\dagger)^m}{\sqrt{m!}}\,|0,0\rangle\right) \tag{4.5}$$

のように作ることができます。すなわち、$|n,m\rangle$ はエネルギー $E = n + 1/2$、および角運動量 $L_z = m - n$ をもつような状態です。

話を簡単にするために、まず $\{|0,m\rangle\}$ の張る LLL の空間に限って話を進めます。複素座標表示での真空の波動関数を求めると、$a\,|0,0\rangle = b\,|0,0\rangle = 0$ を解くことで

$$\langle z, \bar{z}|0,0\rangle \propto e^{-|z|^2/(4l^2)} \tag{4.6}$$

が得られます。ここで、**磁気的スケール長**（*magnetic scale length*）と呼ばれる次元をもった定数 $l^2 = (qB)^{-1}$ を導入しました。ここまでの計算では $l^2 = 1$ としていたのですが、以下の章で必要になるため、この指数の部分においてだけ定数を復活させて書くことにします。有限の角運動量をもった状態は、この基底状態に $b^\dagger$ を作用させることで、

$$\psi_{0,m}(z,\bar{z}) \propto \langle z,\bar{z}|0,m\rangle \propto \langle z,\bar{z}|\,(b^\dagger)^m\,|0,0\rangle \propto z^m e^{-|z|^2/(4l^2)} \tag{4.7}$$

のように得られます。

ここで、少し半古典的な考察をします。状態 $\psi_{0,m}$ の古典的なサイクロトロン回転の半径は、$r^m e^{-r^2/(4l^2)}$ が極値を取る r を探すことなどにより、$r^2 = 2ml^2$ と求めることができます。したがって、$|0,m\rangle$ が $\pi r^2 = 2m\pi l^2$ だけの円形の領域を占有し、その外周をサイクロトロン円運動している、という半古典的な描像が読み取れます。ここで、半径 R の円形の FQH の「液滴（droplet）」を考えると、この中で最大の角運動量 $L_{\max}$ をもつ LLL の電子は、液滴の全面積を占有するようなサイクロトロン円運動を行う電子です。この電子の角運動量 $L_{\max}$ は、

$$2m_{\max}\pi l^2 = \pi R^2 \tag{4.8}$$

より、$m_{\max} = R^2/(2l^2)$ と分かります。逆に、これ以下の角運動量を系の電子は持つことができるので、LLL で m の取りうる値は $m = 0, 1, \cdots, m_{\max}$ となります。したがって、LLL の縮退度は $m_{\max} = L_{\max}$ で与えられます。また、単位面積あたりの縮退度は、$m_{\max}/(\pi R^2) = (2\pi l^2)^{-1}$ です。このような半古典的な描像は、6.3 節でエッジモードの議論をする際に再び利用します。

より一般に、回転対称な系の LLL に属する波動関数は、正則関数 $f = f(z)$ を用いて

$$\Psi(z) = f(z)e^{-|z|^2/(4l^2)} \tag{4.9}$$

という関数形をもつことが分かります。

4.1.2 多体波動関数

以上の議論を N 個の同種粒子からなる多体系に拡張します。一体系の波動関数への考察から、LLL での多体波動関数は

$$\Psi(\{z_i\}) = f(z_1, \cdots, z_N)e^{-\sum_i |z_i|^2/(4l^2)} \tag{4.10}$$

という一般的な関数形をもつことがしたがいます。構成粒子の統計性によって f は対称あるいは反対称とします。以下では、波動関数を表示するのに $e^{-\sum_i |z_i|^2/(4l^2)}$ のガウシアン因子をしばしば省略します。

これから以下で見ていく多くの FQH において、もっとも興味があるのは LLL が部分的に占有された状態です。これまでの議論とは異なり粒子の相互作用を取り入れると、そのような部分的な占有の状態も非縮退かつギャップをもちうる、というのが面白い点です。一方で系の回転対称性は変わらないので、そのような状態も角運動量の固有状態として構成することができ、したがって、f は $\{z_i\}$ の正則関数といえます。

f が与えられると、各変数 z_i の最大べきを読み取ることにより、系のフィリングを求めることができます。この最大べきを m とすると、これは $\Psi(\{z_i\})$ を構成する粒子の最大角運動量が $L_{\max} = m$ であることを意味します。$L_{\max}$ が円板の大きさによって特徴づけられていたことから、対応する大きさの円板を考えることで、LLL の縮退度のうちどれだけの状態が占有されているかの指標として、フィリングは

$$\nu = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{L_{\max}} = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{(f\ \text{の最大べき})} \tag{4.11}$$

と書けます。有限の N に対しては、系の曲率によって補正が入ることがあり、この補正を

$$L_{\max} = \frac{N}{\nu} - \mathcal{S} \tag{4.12}$$

と書いたとき、$\mathcal{S}$ を**シフト（*Shift*）**と呼びます [Wen, 1995]（参照：4.7 節）。以上のことから、f をさまざまに変えることで、異なる統計性やフィリングをもつ粒子のなす FQH を表すことができるのです。

4.1.3 LLL 射影

高次のランダウ準位への拡張は、$a^\dagger$ を作用させることで機械的に行うことができます。では、逆に、複数のランダウ準位にまたがるような状態から、LLL 成分だけを抽出することはできるでしょうか？これは **LLL 射影（*LLL projection*）**[Girvin and Jach, 1984] と呼ばれ、複素座標を用いると以下のように機械的に行うことができます。

LLL 射影

1. 波動関数に含まれる $\bar{z}$ を左側にもってくる。
2. $\bar{z}$ を 2∂ に置き換える。ただし、この微分は多項式部分だけにかかる。

LLL 射影は、$a^\dagger$ の作用によってガウシアンの因子の前に $\bar{z}$ が一つ増えることを踏まえれば、その逆のプロセスとして理解することができます。これによって、$\bar{z}$ のべきがゼロになっているような LLL 波動関数を得ることができます。LLL 射影が簡単な形になるのも、複素座標を用いる利点の一つといえます。詳しい説明は本筋からずれるので省きますが、たとえば教科書 [Jain, 2007] などを参照してください。

4.2 FQH 波動関数

4.2.1 具体例：Laughlin 状態

もっとも簡単な FQH として、フィリング $\nu = 1/m$ をもつ Laughlin 状態の波動関数を具体的に見ていきます。構成粒子をフェルミオンとして、m が奇数の場合に的を絞ります。フィリングから逆算した f の最大べきが $N/\nu = Nm$ $(N \to \infty)$ であること、f が反対称であるべきことなどから、[Laughlin, 1983] において以下のような波動関数が提案されました。

$$\Phi_m(\{z_i\}) \equiv \prod_{i<j}(z_i - z_j)^m \tag{4.13}$$

このような $(z_i - z_j)$ の積の形の因子を **Jastrow 因子（*Jastrow factor*）**と呼びます。Jastrow 因子のゼロ点から読み取れるように、z_i と z_j が近付いたとき波動関数は m 乗で減衰し、このことが電子同士がお互い距離をとって分布することを保証しています。

波動関数 (4.13) は、**Haldane の擬ポテンシャル（*Haldane's pseudo-potential*）**と呼ばれる短距離離的な相互作用ハミルトニアン

$$V(z_i - z_j) = -\sum_{n=1}^{(m-1)/2} C_n \bar{\partial}_i^{2n-1}\delta^2(z_i - z_j)\partial_j^{2n-1} \tag{4.14}$$

の厳密な基底状態になっていることが知られています [Haldane, 1985; Pokrovsky and Talapov, 1985; Trugman and Kivelson, 1985]。Laughlin 波動関数 (4.13) は Coulomb ポテンシャルの基底状態ではないのですが、Coulomb ポテンシャルは擬ポテンシャル (4.14) へとギャップを閉じずに断熱的に変形できると信じられています [?]。したがってトポロジカルな性質は不変であると考えられています。

擬ポテンシャル (4.14) は、2 粒子が近付いたとき波動関数が m 乗よりも遅く減衰する場合に有限のエネルギーとなるようなポテンシャルで、波動関数 (4.13) は (4.14) の基底状態のうち電子密度が最大となるようなものです。ちなみに、エネルギーがゼロになるような、より角運動量の高い他の状態はエッジの励起に対応しており、これについては 6.3 節でくわしく扱うことにしましょう。

4.2.2 具体例：Halperin の (mmn) 状態

前章で波動関数の（多項式部分の）最大べきからフィリングを読み取ることができると分かったので、これを使った例を見てみましょう。3.5 節の最後に、フィリング $\nu = 2/(m+n)$ をもったスピンフルな電子の FQH

として、(mmn) 状態を定義しました。ここでは、スピン上向き部分とスピン下向き部分をそれぞれ考えることで、同じフィリングをもつ FQH の波動関数の候補を考えてみます。そのために、少し一般化して (m_1m_2n) 状態を考えます。

まず、(m_1m_2n) 状態では、スピン上向きとスピン下向きの電子がそれぞれ $\nu^\uparrow = 1/m_1, \nu^\downarrow = 1/m_2$ の Laughlin 状態をなしていると仮定したので、波動関数は単に Jastrow 因子の積として

$$\prod_{i<j}^{N^\uparrow}(z_i^\uparrow - z_j^\uparrow)^{m_1}\prod_{i<j}^{N^\downarrow}(z_i^\downarrow - z_j^\downarrow)^{m_2} \tag{4.15}$$

に比例するだろうことが予想できます。ここで、異なるスピンをもつ電子同士の Coulomb 斥力の効果を取り入れるために、波動関数がさらに

$$\prod_{i<j}(z_i^\uparrow - z_j^\downarrow)^P \tag{4.16}$$

の因子をもつと仮定してみます。P はこれから決める何らかの定数です。この因子を取り入れると、もはやフィリングは $\nu^\uparrow = 1/m_1, \nu^\downarrow = 1/m_2$ からは変化してしまいます。

一方、このとき、上向きスピンと下向きスピンの最大角運動量は、波動関数の最大べきからそれぞれ

$$L^\uparrow_{\max} = m_1N^\uparrow + PN^\downarrow, \qquad L^\downarrow_{\max} = m_2N^\downarrow + PN^\uparrow \tag{4.17}$$

と読み取れます。それぞれの電子はスピン以外の違いはないので、ともに等しい最大角運動量をもつ（$L^\uparrow_{\max} = L^\downarrow_{\max}$）とします。この表式から、それぞれのスピンのフィリングは、

$$\nu^\uparrow = \frac{N^\uparrow}{L^\uparrow_{\max}} = \frac{N^\uparrow}{m_1N^\uparrow + PN^\downarrow}, \qquad \nu^\downarrow = \frac{N^\downarrow}{L^\downarrow_{\max}} = \frac{N^\downarrow}{m_1N^\downarrow + PN^\uparrow} \tag{4.18}$$

と求めることができます。したがって、少し計算すると合計のフィリング $\nu = \nu^\uparrow + \nu^\downarrow$ は

$$\nu = \frac{m_1 + m_2 - 2P}{m_1m_2 - P^2} \tag{4.19}$$

となり、$m_1 = m_2 = m$ では $\nu = 2/(m+P)$ と簡約されます。これが (mmn) 状態のフィリング $\nu = 1/(m+n)$ と一致するには $n = P$ と取ればよいことが分かります。

以上の議論より、最大べきの情報だけから (mmn) 状態の波動関数（の多項式部分）

$$\Psi_{(mmn)}(\{z_i^{(\alpha)}\}) = \prod_{i<j}^{N^\uparrow}(z_i^\uparrow - z_j^\uparrow)^m\prod_{i<j}^{N^\downarrow}(z_i^\downarrow - z_j^\downarrow)^m\prod_{i<j}(z_i^\uparrow - z_j^\downarrow)^n \tag{4.20}$$

を得ることができました。

では、K 行列から定義された (mmn) 状態と波動関数 (4.20) で記述される状態は同一であると言えるでしょうか？これらの状態は同じフィリングをもちますが、これは同一の FQH であることを一般に意味しません[*14]。にもかかわらず、この場合には、2つの状態は同一の (mmn) 状態であることを CFT の方法を用いて同定することができます。このことは、CFT の威力が発揮される例の一つであり、5.2 節で詳しく見ていきます。

ポイント 14

（可換）FQH のフィリングは、波動関数の最大べきから読み取れる

[*14] たとえば、(331) 状態、Moore-Read 状態（??節）、Halperin-Lee-Read 状態（2.4 節）はすべてフィリング $\nu = 1/2$ をもちますが、すべて異なる基底状態と励起の構造をもつ別々の状態です。

4.3　複合フェルミオンの波動関数

次に、2.4 節でみたフラックス固着、複合フェルミオンといった描像が波動関数の言葉でどのように表現されるのか見ていきます。

4.3.1　Jastrow 因子によるフラックス固着

Jastrow 因子 (4.13) は、フラックスを m 本固着させて複合フェルミオン（ボゾン）を形成する因子として解釈できます。電子をフラックス固着によって複合ボゾンにした場合を考えると、もとの電子の波動関数は

$$\Psi(\{z_i\}) = \prod_{i<j}(z_i - z_j)^m \Phi_{\mathrm{CB}}(\{z_i\}) \tag{4.21}$$

のような形に書きあらわすことができます。実際、2 電子の座標 z_i と z_j を入れ替えるような操作 $(z_i - z_j) \to -(z_i - z_j)$ を考えると、この操作によって波動関数には

$$(-1)^m = e^{i\pi m} \tag{4.22}$$

だけの位相因子がつきます。これは AB 位相からの寄与にほかならず、m が奇数のときには統計性を反転させる因子としてはたらきます。m が偶数のときも同様に、統計性を反転させないままフラックスを固着させるような因子として解釈することができるのです。

さて、この観点から、$\nu = 1/(2p+1)$ の Laughlin 状態の波動関数 (4.13) も再解釈することができます。まず、Laughlin 状態の波動関数を (4.21) とパラレルになるように

$$\Psi_{\mathrm{Laughlin}}(\{z_i\}) = \prod_{i<j}(z_i - z_j)^{2p} \Phi_1(\{z_i\}) \tag{4.23}$$

のように書き換えておきます。ここで、$\Phi_1(\{z_i\}) = \prod_{i<j}(z_i - z_j)$ は LLL が完全に占有された $\nu = 1$IQH の波動関数です。このように書き換えると、波動関数 $\Psi_{\mathrm{Laughlin}}(\{z_i\})$ の 1 つ目の因子をフラックスを固着させる Jastrow 因子、２つ目の因子を複合フェルミオンの波動関数と見ることができます。これは、2.4 節で議論したような、$(2p)$ 本のフラックスを固着した複合フェルミオンが最低 Λ 準位を占有しているという Laughlin 状態の描像を正しく反映していることが読み取れます。

4.3.2　具体例：Jain 系列

同様に、Jain 系列の波動関数もあらわに表示することができます。ただし、一般の Jain 系列の波動関数には高い Λ 準位に対応する非正則な $\{\bar{z}_i\}$ が含まれているので、これを取り除くために LLL 射影 $\mathcal{P}_{LLL}$ を取ります。結局、Jain 系列 $\nu = n/(2pn+1)$ の波動関数は

$$\Psi_{n/(2pn+1)}(\{z_i\}) = \mathcal{P}_{LLL}\left(\prod_{i<j}(z_i - z_j)^{2p} \Phi_n(\{z_i\})\right) \tag{4.24}$$

となります。ただし、n 番目までの Λ 準位を占有した複合フェルミオンの波動関数を $\Phi_n(\{z_i\})$ としました。

4.4　準粒子・準正孔励起

FQH のもっとも特異な性質の一つとして、分数統計をもつ準粒子（準正孔）励起の存在がありました。このようなエニオン励起の情報は、前節で議論した電子の波動関数に組み込むことができます。

4.4.1 1 励起状態

まず、3.5 節で議論したように、エニオン励起とは物質場の渦糸のことでした。したがって、電子を準正孔（準粒子）のまわりに正の向きに一周すると、波動関数には $e^{\pm 2i\pi}$ の位相がつきます。これを指導原理として、エニオン励起があるときの波動関数がどのようになるか考えてみましょう。

まず、準正孔励起が 1 つあるときには、η を準正孔の複素座標とすると、波動関数は

$$\prod_i (z_i - \eta) \tag{4.25}$$

の因子をもとの正則な波動関数にかけることで得られます。実際、電子 z_i を η の周りに一周すると $(z_i - \eta) \to e^{2\pi i}(z_i - \eta)$ の位相が得られ、統計性を正しく反映しています。また、そもそも準正孔とは電子の密度が局所的に小さくなったところのことだったので、$z_i \to \eta$ で波動関数が 1 次で減衰すること、したがってこの励起が有限のエネルギーをもつこと（参照：6.3.1 節）なども読み取れます。

一方、エニオン励起が準粒子であるときには、$\bar{\eta}$ を準粒子の複素座標として $\prod_i (\bar{z}_i - \bar{\eta})$ を正則な波動関数にかけると良さそうです。しかし、波動関数が反正則な $\bar{z}$ を含むと、高次のランダウ準位を含むことになります。これを防ぐために、LLL 射影（参照：6.3.1 節）を取って

$$\prod_i (2\partial_i - \bar{\eta}) \tag{4.26}$$

の因子をもとの正則な波動関数にかけることで、正しい波動関数が得られます。ただし、この微分はガウシアン因子ではなく、正則部分だけに作用することに注意が必要です。

4.4.2 2 励起状態、モノドロミー

エニオン励起が複数あるときは、エニオン同士の統計性を考慮する必要があり、いくぶんか複雑になります。ここでは、特に、$\nu = 1/m$ の Laughlin 状態に準正孔の励起が 2 つあるときの波動関数を考えます。このときの波動関数は、

$$\Psi(\eta_1, \eta_2; \{z_i\}) = (\eta_1 - \eta_2)^{1/m} \prod_i (z_i - \eta_1)(z_i - \eta_2) e^{-(|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2)/(4ml^2)} \prod_{i<j} (z_i - z_j) e^{-\sum_i |z_i|^2 (/4l^2)} \tag{4.27}$$

で与えられます [Laughlin, 1983]。この波動関数は、電子気体中のエニオンを古典プラズマ中の不純物と見なす、**プラズマ・アナロジー（*Plasma analogy*）**という方法で導出されました。ここでは導出の詳細には踏み込みませんが、この波動関数が正しいエニオンの統計性を反映していることを確認しておきましょう。

まず、この波動関数は $\{z_i\}$ については一価で、これは電子がほかのどんなエニオンとも自明な統計しかもたないことと対応しています。一方、η_1 と η_2 を入れ替えるような操作に対しては、この波動関数は $(-1)^{1/m} = e^{i\pi/m}$ の位相を生じます。すなわち、η_i についてはこの波動関数は多価で、$\eta_1 = \eta_2$ の点からはじまるブランチカットを持つ、m 枚のリーマン面上で定義された関数になっていることが分かります。このように、リーマン面上でブランチカットを横切ることから生じる波動関数の位相を**モノドロミー（*monodromy*）**と呼びます[*15]。物理的には、エニオンの統計角 $\theta = i\pi/m$ を正しく反映していることが分かります。

[*15] モノドロミーを与える因子 $(\eta_1 - \eta_2)^{1/m}$ の因子を、特異性をもったゲージ変換

$$\Psi \mapsto e^{-i \arg(\eta_1 - \eta_2)/m} \Psi \tag{4.28}$$

によって $|\eta_1 - \eta_2|^{1/m}$ に変化させ、波動関数の特異性を消すことができます。このときには、代わりにゲージ場が $\eta_1 = \eta_2$ で特異性をもち、エニオン同士の統計性はフラックスとの AB 位相として現れます。

前者のように、エニオンの統計性からくる特異性を波動関数のモノドロミーに押し付けたゲージを**正則ゲージ（*Holomorphic gauge*）**あるいは**分数統計ゲージ（*Fractional statistics gauge*）**と呼び、後者のように、ゲージ場に押し付けたゲージを**特異ゲージ（*Singular gauge*）**と呼びます。正則ゲージはプラズマ・アナロジーから自然に現れるゲージで、η_1 平面上で波動関数が η_2 を始点とするブランチカットをもち、m 枚のリーマン面上で定義されているという特徴があります [Kjønsberg and Leinaas, 1997]。一方、特異ゲージはエニオンと同じ座標に無限に細いフラックスをおくゲージで、物理的にはフラックス固着に対応しています。

以下では、CFT との関係を考えるときに見通しが良くなることから、正則ゲージをもっぱら用います。

4.5　Haldane-Halperin の議論

前章では、Chern-Simons 理論を用いて FQH の階層性を議論しました。少し振り返ると、親状態からのマクロな数の準粒子（あるいは準正孔）励起が、別の Laughlin 状態を作ることによって、異なるフィリングをもつ娘状態を得ることができたのでした。この階層性の描像を、波動関数の立場から見ることはできないでしょうか？

4.5.1　可換 FQH の階層性の一般論

実は、準粒子（準正孔）励起の**擬波動関数**を用いることで、K 行列によって得られたのと等価な階層構造を構成することができます。FQH の階層構造を初めて議論したのは [Haldane, 1983; Halperin, 1984] ですが、ここでは後者の議論にしたがって、娘状態の波動関数を構成してみます。準粒子の擬波動関数を $\Phi(\{\eta_j\})$ とすると、$n+1$ 番目の娘状態の波動関数 $\Psi_{n+1}(\{z_i\})$ は

$$\Psi_{n+1}(\{z_i\}) = \int \prod_{j=1}^{M} \mathrm{d}^2\eta_j \overline{\Phi(\{\eta_i\})}\Psi_n(\{\eta_j\};\{z_i\}) \tag{4.29}$$

のように準粒子の座標の畳み込みの形で書けるはずです。ここに、$\Psi_n(\{\eta_j\};\{z_i\})$ は、M 個の準粒子励起 $\{\eta_j\}$ を含む n 番目の親状態の波動関数です。

擬波動関数、と言ったのは、$\Phi(\{\eta_j\})$ は $\{\eta_j\}$ について一価の波動関数になっていないためです。このことは、準粒子（エニオン）同士は非自明なブレイディングをするので、$\eta_i = \eta_j$ は $\Phi(\{\eta_j\})$ の特異点（ブランチカットの始点）になっていることから分かります（参照：4.4 節）。その代わり、(4.29) の積分の中では、$\{\eta_i\}$ のブランチカットから来る余分な位相が打ち消され（これが複素共役を取る理由です）、積分した結果の $\Psi_{n+1}(\{z_i\})$ は正しく一価の波動関数になっているわけです。

このように、ブランチカットの寄与を単にその複素共役を用意するだけで打ち消すことができる、というのが可換 FQH 特有の性質であり、これによって (4.29) の積分を正しく定義できるのです。一方、後で見るように、非可換 FQH を考えると、ブランチカットを横切ったときに単なる位相因子ではなく非可換な行列がかかることになるので、これをうまく打ち消すように擬波動関数を用意しなくてはいけません。これが可換 FQH の階層構造を非可換 FQH に一般化することが困難な理由ですが、5.5 節で見るように、非可換 FQH で階層性を定義するいくつかの方法も知られています。

4.5.2　準正孔のフィリングと娘状態

与えられた親状態からどんな娘状態が生じるかは、励起する準正孔のフィリングを固定することで決めることができます。この情報は、(4.29) の中で準正孔の個数 M として組み込まれています。では、たとえば準正孔が $\nu' = 1/m_1$ の Laughlin 状態をなすとして、M をどのように決めればよいでしょうか？その答えを考える上で重要なのは、電子が準正孔を渦糸と感じたのとは逆に、準正孔は電子を 1 本のフラックスとして感じる、という点です。このことは、電子が準正孔をまわることは準正孔が電子をまわることと等価である、と言い換えられます。あるいは、(4.25) で、準正孔 η を電子 z_i の周りに一周させると $e^{2\pi i}$ の位相がつくことから理解できるでしょう。

これを具体的な例で見てみましょう [Haldane, 1983]。$\nu = 1/3$ の Laughlin 状態から、準正孔が励起して $\nu' = 1/2$ の Laughlin 状態を作った結果として得られる娘状態を考えます。電子数を N とすると EM フラックスは $3N$ 本であり、ここに $N/2$ 本の EM フラックスを余分に加えることで、$N/2$ 個の準正孔を励起することができます。このとき、$N/2$ 個の準正孔は N 個の電子をそれぞれフラックスとして見るので、結局、準正孔のフィリングは予想されたように $\nu' = 1/2$ となります。ここで、合計のフィリングを考えると、電子が N

個に対してフラックスが $(3N + N/2)$ 本なので、

$$\nu = \frac{1}{3+\frac{1}{2}} = \frac{2}{7} \tag{4.30}$$

のように得られることが分かりました。これは、3.5 節で見た階層性のプロセスのより直接的な説明でもあります。

この場合、励起するべき準正孔は $N/2$ 個なので、$M = N/2$ と決めればいいことが分かります。また、より一般に、1 次の娘状態をなすとき、準正孔が ν' のフィリングをもつためには、$M = \nu' N$ と決めればよいでしょう。このとき、準正孔の擬波動関数は、

$$\Phi = \prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j)^2 e^{-\sum_i |\eta_i|^2/(4\cdot 3l^2)} \tag{4.31}$$

となります。指数関数の肩にある 1/3 は、準正孔が電子の 1/3 の電荷をもち、そのため磁気的スケール長が 3 倍になっていることからしたがいます（$l^2 = (qB)^{-1}$ だったのでした）。

したがって、この娘状態の波動関数は

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{daughter}}(\{z_i\}) = \int \prod_{j=1}^{N/2} \mathrm{d}^2\eta_j \prod_{i<j}(\bar{\eta}_i - \bar{\eta}_j)^2 e^{-\sum_i |\eta_i|^2/(4\cdot 3l^2)} \\ \times \prod_{i<j}|\eta_i - \eta_j|^{1/3} \prod_i (z_i - \eta) \prod_{i<j}(z_i - z_j)^2 e^{-\sum_i |z_i|^2/(4l^2)}\end{aligned} \tag{4.32}$$

という積分を実行するだけ（？）で得られます。ここで、M 個励起があるときの親状態の波動関数を書き下すのに、少し先の結果 (5.1) を先取りしました。基本的には 2 励起状態の波動関数（正則ゲージ）(4.27) の単純な一般化になっています。

さて、(4.32) は階層 FQH としてはもっとも簡単なものなのですが、見た目の険しさからも分かるように、この積分を解析的に実行する方法はまだ知られていません。数値的には、たとえば [Greiter, 1994] などで試みられており、厳密対角化の結果との比較の結果、波動関数のオーバーラップが十分にあることが分かっています。しかし、この数値計算は粒子数がわずか $N = 8$ であるため、この結果をもって結論を下すにはやや尚早であると考えられています。また、Laughlin 状態は Haldane の擬ポテンシャル (4.14) でしたが、たとえば (4.32) のような階層 FQH がどのようなハミルトニアンの基底状態になっているのかも分かっていません。

しかし、CFT の方法を用いると、本節でみたような Haldane-Halperin の議論と複合フェルミオン描像をある程度、統一的に見通し良く理解することができます。詳細は次章で見ていきます。

ポイント 15

準正孔が電子の渦糸であるという視点を逆転させると、準正孔からは電子がフラックスとして感じられると言える

4.6 多体波動関数と非可換 FQH

波動関数の枠組みで、非可換なエニオン統計をもった FQH も考えることができます。ここではそのもっとも簡単な例として、3.3 節で触れた、有効的にフラックスを感じないような複合フェルミオンの系から構成できる FQH に着目しましょう。複合フェルミオンが有効的にフラックスを感じないとき、これを通常のスピンレスな電子のように扱って、複合フェルミオンからなる超伝導状態を考えることができます。実は、これは非可換エニオンを含んだ FQH になっていることが知られています。

4.6.1 具体例：Moore-Read 状態

電子同士が s 波で（角運動量ゼロで）クーパー対をなす BCS 超伝導とは異なり、電子同士が有限の角運動量をもって対をなすような時間反転対称性を破る超伝導状態は、総称して**カイラル超伝導（*chiral superconductivity*）**と呼ばれています。p 波超伝導の波動関数は、BdG ハミルトニアンを対角化する Bogoliubov 準粒子の生成演算子から運動量空間で構成することができます。実空間での波動関数は、これをフーリエ変換することで得られ、

$$\Psi_{\text{p-wave}}(\{z_i\}) = \mathrm{Pf}(g(z_i - z_j)) \tag{4.33}$$

のように書けます。$g(z_i - z_j)$ は 2 粒子の実空間波動関数で、これをすべての Cooper 対について足し上げることで全体の波動関数が得られます。ここで $\mathrm{Pf}(A_{ij})$ は**パフィアン（*pfaffian*）**と呼ばれる演算で、$2N \times 2N$ の反対称行列 (A_{ij}) に対して、すべての可能なペア について足し上げる演算です：

$$\mathrm{Pf}(A_{ij}) = \sum_{\text{pairings } \sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2N-1)\sigma(2N)} \tag{4.34}$$

ただし、ペアの重複を避けるため $\sigma(2k-1) < \sigma(2k)$ かつ $\sigma(1) < \sigma(3) < \cdots$ という制約を課します。

$$\mathrm{Pf}(A_{ij})^2 = \det(A_{ij}) \tag{4.35}$$

の関係が成り立つことから、標語的に「パフィアンは行列式の平方根」ということもできます。弱結合領域では

$$g(z_i - z_j) = \frac{1}{z_i - z_j} \tag{4.36}$$

のようになることが知られおり、ここから実空間での波動関数 (4.33) の形を得ることができます。

さて、3.3 節では、フィリング $\nu = 1/2$ で生じる複合フェルミオンのフェルミ液体として HLR 状態を紹介しました。HLR 状態では複合フェルミオンはフラックスを感じないので、複合フェルミオン自身が上で紹介したような p 波超伝導体を形成することができます。フラックス固着が Jastrow 因子で表されたことを思い出すと、このような状態の波動関数は

$$\Psi_{\mathrm{MR}}(\{z_i\}) = \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right) \prod_{i<j} (z_i - z_j)^2 \tag{4.37}$$

と書くことができます。これは **Moore-Read 状態（*Moore-Read state*）**あるいは **Pfaffian 状態（*Pfaffian state*）**と呼ばれ、[Moore and Read, 1991] で初めて導入されました。Moore-Read 状態は非可換な Ising エニオンの励起を持ち、フィリング $\nu = 1/2$ で実現する非可換 FQH の一つです。正確に言うと、フィリングは $\nu = 5/2$ であり、高次の Landau 準位が入るような状態なのですが、Landau 準位のヒルベルト空間を構成したときに見たように、これは LLL にマップすることができ、便宜上 $\nu = 1/2$ として扱うことができます。

4.6.2 Read-Rezayi 系列

（準備中）

[Read and Rezayi, 1999]

ポイント 16

高次の Landau 準位が含まれる状態では非可換 FQH が実現することがあるが、これは LLL にマップして 1 より小さいフィリングとして扱うことができる

4.7 曲がった空間の FQH

曲がった平面上（有限の曲率をもつ 2 次元平面上）で量子ホール効果を考えるとき、平坦な平面上の系では現れなかった効果が現れます。これまで見てきた量子ホール効果の有効理論は Chern-Simons 理論ですが、この曲がった平面の効果は、K 行列と電荷ベクトルでは捉えられません（なお、簡単のため、このノート全体を通じて可換 FQH だけを扱うことにします。これから見るように、この効果をとらえるために、ラグランジアンには平面の曲率とダイナミカルなゲージ場との結合項が現れる。

4.7.1 具体例：IQH

はじめに、簡単な例を通じて、曲がった平面上の FQH の特徴を見ていきましょう。2 次元球面 S^2 上の $\nu = 1$ の IQH を考え、LLL が完全に占有されているとします。

球面上の磁場は一様とし、球面をつらぬく磁束を（単位磁束で数えて）N_ϕ 本とします。このとき、球面の回転対称性を反映して、ハミルトニアンは $su(2)$ 対称性をもつことになります。

この作用に対して系の（一粒子）基底状態はスピン $S^{su(2)} = N_\phi/2$ の既約表現に属し、したがって $N_\phi + 1$ 重に縮退します。また、次のランダウ準位は同様にスピン $S^{su(2)} = N_\phi/2 + 1$ の既約表現に属し、したがって $N_\phi + 3$ 重に縮退します。および一般に、n 番目のランダウ準位はン $S^{su(2)} = N_\phi/2 + n - 1$ の既約表現に属し、したがって $N_\phi + 2n - 1$ 重に縮退することになります。

以上のことは、平面上のランダウ準位の縮退度が系の面積だけで決まり、かつ各準位は等しい縮退度をもっていたことと対照的です。

具体的に、平面上の $\nu = 1$ の IQH の波動関数は、スピノル座標

$$(u, v) = (e^{i\phi/2}\cos\theta, e^{-i\phi/2}\sin\theta) \tag{4.38}$$

を用いて、$\psi_{m,n}(u, v) = u^m v^n$ で与えられることが知られています [Wen, 1995]。ただし、m, n は負でない整数で、スピン $S^{su(2)}$ との間に

$$S^{su(2)} = \frac{m+n}{2},\ S_z^{su(2)} = \frac{m-n}{2} \tag{4.39}$$

の関係があります。なお、この $su(2)$ 自由度は、粒子のスピンとは**まったく関係がない**ので注意してください

以上より、最低ランダウ準位が完全に占有された $\nu = 1$ の IQH には、$N_e = N_\phi + 1$ 個の粒子が含まれていると言え、したがって、平面が平坦な場合と異なり、N_e/N_ϕ の値はフィリング ν と一致しません。この差を

$$\mathcal{S} = \frac{N_e}{\nu} - N_\phi = (\text{ランダウ準位の縮退度}) - (\text{磁束の本数}) \tag{4.40}$$

と表し、曲率の影響で増えた分の縮退度 $\mathcal{S}$ を**シフト（*shift*）**とよびます。シフトは平面のトポロジーに依存して変化し、たとえば今の S^2 の場合では $\mathcal{S} = 1$ ですが、トーラス T^2 なら $\mathcal{S} = 0$ であることがしられています。また、2 番目のランダウ準位が完全に占有された $\nu = 2$ の IQH では、$N_e = N_\phi + 3$ となるので、シフトは $\mathcal{S} = 3$ となります。

4.7.2 平面の曲率との関係

2 でも述べたように、古典的には、FQH の粒子はシンクロトロン円運動をしていて、異なるランダウ準位は異なる軌道角運動量に対応します。ランダウ準位が上がると、粒子が運ぶ角運動量は 1 ずつ増加していくので、この角運動量 S_{ob} を以下では、**軌道スピン（*orbital spin*）**と呼ぶことにします[*16]。有限の軌道スピン

[*16] 繰り返しになりますが、この自由度は粒子のスピンや上で見た $su(2)$ の自由度とは全く関係がないので注意してください。本節では、粒子の（狭義の）スピン自由度は考えません。

S_{ob} を持つ粒子を平面上のループ C に沿って動かすと、Berry 位相

$$\phi = S_{ob} \int_C dx^i \omega_i = S_{ob} \int_{S_C} d^2 x R \tag{4.41}$$

を拾うことが分かります。ここに、$R = \epsilon_{ij}\partial_i \omega_j$ は平面の曲率、ω_i は $SO(2,1)$ スピン接続の空間成分としました。3 次元に埋め込まれた 2 次元閉曲面を考えると R の積分は掃いた全立体角 Ω を拾うので、たとえば球面全体の積分では 4π となります。

一方、粒子は有限の EM 電荷と軌道スピンをもつので、磁束と上の Berry 位相の合計のフラックス

$$N_\phi^* = \frac{1}{2\pi} \int dx^i (-A_i + S_{ob}\omega_i) = N_\phi \ \frac{\Omega}{4\pi} + S_{ob} \ \frac{\Omega}{2\pi} \tag{4.42}$$

を感じることになります。平坦な平面上では Berry 位相の寄与はないので、平坦な系と曲がった系の違いであるシフトは、この Berry 位相から来るものだと理解することができます。

ランダウ準位が 1 上がると軌道スピンは 1 増加するので、$S_{ob} = n + \text{const.}$ と書けます。すなわち、全球面で積分したベリー位相はランダウ準位が 1 上がるごとに 4π（フラックス 2 本）増えます。したがって、ランダウ準位が 1 上がると Shift $\mathcal{S}$ は 2 増える、ということができます。

一方、n 番目のランダウ準位の粒子はスピン $S^{su(2)} = N_\phi/2 + n - 1$ の既約表現にしたがうので、$\hat{\boldsymbol{n}} = (\theta, \phi)$ に局在する粒子の波動関数は $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{S}^{su(2)}$ の固有状態となります。したがって、粒子をループに沿って掃いたときに得る位相は、

$$N_\phi^* = S^{su(2)} \ \frac{\Omega}{2\pi} = N_\phi \ \frac{\Omega}{4\pi} + (n-1)\frac{\Omega}{2\pi} \tag{4.43}$$

したがって、

$$cS_{ob} = n - 1 \tag{4.44}$$

を得ます。たとえば、LLL の軌道スピンは 0 です。

t ベクトル以上の話を Chern-Simons 理論に取り込むためには、新たな項

$$\mathcal{L}_{int} = -t_1 A \wedge J + S_{ob}\omega_i J^i \tag{4.45}$$

を取り入れる必要があります。カレント J と結合した合計のゲージ場は、$A_i^{tot} = -t_1 A_i + S_{ob}\omega_i$ で与えられ、この合計のゲージ場についてのフラックスは上の結果を再現します。また、この項は励起 J に EM 電荷 $-t_1$ と角運動量 S_{ob} を割り当てると解釈できます。割り当てられた EM 電荷と角運動量は、

$$J_{EM}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -t_1 J^\mu, \ L^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_i} = S_{ob} J^i \tag{4.46}$$

で与えられます。

以下では、簡単のため $N_\phi > 0$（平面の内側から外側に磁束がつらぬく）とし、負の電荷をもった粒子の系（ $t_1 = 1$ ）を考えます。$\nu = 1/m$ の Laughlin 状態をなしているとき、系の波動関数は

$$\Phi_m(u, v) = \prod_{i<j} (u^i v^i - u^j v^j)^m \tag{4.47}$$

となります。ただし、(u^i, v^i) は i 番目の電子のスピノル座標です。ある i に着目すると、Φ_m は $u^i v^i$ の $m(N_p - 1)$ 次の斉次多項式となっているので、 $S^{su(2)} = m(N_p - 1)/2$ の既約表現に属します [Wen, 1992]。

全粒子が最低ランダウ準位にあるので、粒子の感じる合計フラックスは $N_\phi^* = 2S^{su(2)} = m(N_p - 1) = N_\phi + 2S_{ob}$ です。したがって、この系のシフトは、

$$c\mathcal{S} = mN_p - N_\phi = 2S_{ob} + m \tag{4.48}$$

と分かります。特に、前節の議論から $S_{ob}=0$ であることが分かっているので、$\mathcal{S}=m$ が得られます。これを Chern-Simons 理論に組み込むには、スピン接続とダイナミカルなゲージ場の結合項を導入して

$$\mathcal{L}=-\frac{m}{4\pi}\mathrm{ada}+\frac{1}{2\pi}\mathrm{Ada}+\frac{s}{2\pi}\omega\mathrm{da} \tag{4.49}$$

とすればよいです。ただし、ω は空間成分のみを持つとしています。実際、総粒子数は（粒子が電荷 1 をもつことから EM 電荷を数えればよく） $N_e=\int J^0_{EM}=(1/2\pi)\int(\nabla\times a)$ で与えられ、a_0 の運動方程式より

$$N_e=\int\frac{\nabla\times a}{2\pi}=\frac{1}{m}\int\left(\frac{dA}{2\pi}+\frac{s}{2\pi}\nabla\times\omega\right)=\frac{N_\phi}{m}+\frac{2s}{m} \tag{4.50}$$

すなわち Shift は $\mathcal{S}=2s$ となることがしたがいます。

以上より、

$$s=S_{ob}+\frac{m}{2} \tag{4.51}$$

となります。すなわち、**スピンベクトル（*spin vector*）**s は、もとの粒子の軌道スピンからの寄与と第 2 項からの寄与を受けます。第 2 項を Flux attachment による軌道スピンの修正項と解釈すると、**スピンベクトルは複合フェルミオン１つあたりの軌道スピン**だと理解できます。

複合フェルミオン 1 つあたりの角運動量が s なので、総角運動量を $L=\int\partial\mathcal{L}/\partial\omega$ として、粒子数は $N_e=L/s$ でも与えられる。上の $U(1)$ ラグランジアンに対して、

$$L=\int\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\omega}=s\int\frac{\nabla\times a}{2\pi}=\frac{s}{m}\int\left(\frac{\nabla\times A}{2\pi}+s\frac{\nabla\times\omega}{2\pi}\right)=\frac{s}{m}\left(N_\phi+2s\right) \tag{4.52}$$

が得られました。これより

$$mN_e=N_\phi+2s \tag{4.53}$$

がしたがい、これは上の結果 $\mathcal{S}=2s$ を再現していることが分かります。

この章のまとめ

- LLL 多体波動関数は正則多項式で表され、その最大次数がフィリングを決定する。Laughlin 状態は Jastrow 因子からなり、擬ポテンシャルの厳密解を与える。
- 準粒子の波動関数はエニオンの座標について多価性を持ち、モノドロミーが分数統計を反映する。励起の凝縮による階層構造は、準粒子の擬波動関数の畳み込み積分により構成される。
- 複合フェルミオンはフラックス固着として理解され、その有効理論からパフィアンを含む非可換 Moore-Read 状態や、曲率に依存するシフトが導かれる。

この章についてくわしく

- [Jain, 2007] はややマニアックめな複合フェルミオン描像の教科書です。LLL 射影は実はかなり闇が深く、まともに扱おうとすると x 座標と y 座標が非可換になる非可換空間上の量子論（ゲージ場が非可換なのではなく、座標そのものが非可換）が出てきてかなり大変です。それをまともに扱ったのがこれです。 LLL 射影のテクニカルな内容は学ぶところが多いのでトピックをピックアップして読むと楽しいと思います。
-

5　バルクの理論としての CFT

さて、タイトルに CFT と冠しておきながら、いつまでたっても CFT の話をせず、ここまで来てしまいました。しかし、FQH に関する下準備は前章までの議論で完全に完了したので、いよいよ安心して本題に入っていきたいと思います。

この章のキーワード

- バルク CFT
- Moore-Read 予想
- 共形ブロック
- Bonderson-Slingerland 階層性
- Levin-Halperin 階層性
- Harmanns 階層性

5.1　共形ブロックとしての波動関数

前章で、FQH を構成する電子の波動関数の性質を見てきました。もちろん、この波動関数は磁場中の相互作用ハミルトニアンの基底状態として得られた（ここまでは量子力学しか使っていない）わけですが、実は、次のような驚くべき予想 [Moore and Read, 1991] が存在します。

Moore-Read 予想（1）

どんな分数量子ホール系の波動関数も、あるユニタリな有理共形場理論（RCFT）におけるプライマリ場の相関関数として表現できる。

この予想は、いくつかの具体的な FQH の研究から現れました。実際、いくつかの FQH では、以下で見るように具体的な CFT とあらわに対応させることができます。このような CFT を、与えられた FQH の**バルク CFT（*Bulk CFT*）**と呼びます。すなわち、上の予想は、「どんな FQH にも、対応するバルク CFT が存在する」と言い換えられるわけです。ちなみに、FQH の波動関数を再現するような CFT は一般に複数ある（必要なプライマリ場を含むように拡大できる）ので、このような CFT のうちもっとも最小のものを**ミニマルな（*minimal*）**バルク CFT と呼ぶことにします。

本章では、実際にバルク CFT を FQH の解析にどのように活用することができるのかを、具体例を用いながら見ていきたいと思います。

5.1.1　具体例：Lauhlin 状態

たとえば、$\nu = 1/m$ の Laughlin 波動関数は、$c = 1$ 自由ボソン系の CFT の正則な共形ブロックとして次のように書き換えられることが知られています [Fubini and Lütken, 1991; Moore and Read, 1991]。

$$\prod_{i<j}(z_i - z_j)^m e^{-\sum_i |z_i|^2/(4l^2)} = \left\langle \prod_i V_e(z_i)\mathcal{O}_{\rm bg} \right\rangle \tag{5.1}$$

ここで、$V_e(z_i)$ は共形ウェイト $h_e = m/2$ の頂点演算子

$$V_e(z_i) =: e^{i\sqrt{m}\phi(z_i)} : \tag{5.2}$$

で、２点関数が $\langle\phi(z)\phi(w)\rangle = -\ln(z-w)$ となるように規格化されたカイラルな自由ボソン場 $\phi(z)$ を用いて定義しました。すなわち、これは作用

$$S = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2 z \partial\phi\bar{\partial}\phi \tag{5.3}$$

によって定義されるスカラー場 $\phi(z,\bar{z}) \equiv \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z})$ の正則部分です。フェルミオンからなる FQH では m は奇数なので、$V_e(z)$ は半整数の共形ウェイトをもつことになり、たしかにフェルミオニックな自由度に対応しています。なお、この場合には対応するバルク CFT は可換なので、共形ブロックの空間は 1 次元です。一方、非可換 FQH の場合には共形ブロックの空間が 2 以上の次元をもつことになり、あとの章でくわしく見ていきます。

また、CFT の一般論から、頂点演算子の相関関数がゼロでない値を持つためには電荷の総和がゼロでなくてはいけませんが、これを保証するために複素平面全体に広がった一様な背景電荷

$$\mathcal{O}_{\mathrm{bg}} \equiv :\exp\left[-i\rho_0\sqrt{m}\int \mathrm{d}^2z'\phi(z')\right]: \tag{5.4}$$

を挿入しています。ここに、$\rho_0 = 1/(2m\pi l^2)$ は電子の密度です（$1/(2\pi l^2)$ が単位面積あたりの LLL の縮退度を与えていたことを思い出しましょう）。また、背景に一様な電荷をおく代わりに、複素平面をコンパクト化して無限遠点に負の電荷をおく方法もあり、このときには Laughlin 波動関数の多項式部分が再現されます[*17]。

以上の定義を踏まえ、$\langle\phi(z)\phi(w)\rangle = -\ln(z-w)$ を用いて計算してみます。頂点演算子についての Wick の定理

$$\left\langle :e^{il_1\phi(z_1)}:\cdots:e^{il_N\phi(z_N)}:\right\rangle = \prod_{i<j}\exp\left[-l_il_j\left\langle\phi(z_i)\phi(z_j)\right\rangle\right] \tag{5.7}$$

および

$$\left\langle :e^{ip\phi(z)}:\mathcal{O}_{\mathrm{bg}}\right\rangle = \exp\left[-p\rho_0\sqrt{m}\int \mathrm{d}^2z\ln(z-z')\right] \simeq \exp\left[-\frac{p}{\sqrt{m}}\frac{|z|^2}{4l^2}\right] \tag{5.8}$$

などを用いて計算[*18] すると、たしかに (5.1) が成立していることが確認できるはずです。なお、CFT の基礎事項に関しては、付録 B を参照してください。

5.1.2　準粒子（準正孔）励起

波動関数を上のように書いておくと、エニオン励起があるときの波動関数（(4.27) など）がとても見通し良く記述できます。

Laughlin 状態に対しては、準正孔は共形ウェイト $h = 1/(2m)$ の頂点演算子

$$H(\eta) = :e^{i\sqrt{1/m}\phi(\eta)}: \tag{5.10}$$

に対応します。すなわち、準正孔が $\{\eta_j\}$ にあるときの（正則ゲージでの）波動関数は単に

$$\Psi(\{\eta_j\};\{z_i\}) = \left\langle\prod_j H(\eta_j)\prod_i V_e(z_i)\mathcal{O}_{\mathrm{bg}}\right\rangle \tag{5.11}$$

[*17] Laughlin 波動関数の多項式部分は

$$\prod_{i<j}(z_i-z_j)^m = \lim_{z_\infty\to\infty} z_\infty^{2h_\infty}\left\langle V_N(z_\infty)\prod_i V_e(z_i)\right\rangle \tag{5.5}$$

のように書くこともできます。このとき、

$$V_N(z_\infty) = :e^{-i\sqrt{m}N\phi(z_i)}: \tag{5.6}$$

は無限遠に挿入した $h_N = mN^2/2$ の頂点演算子で、$z_\infty^{2h_\infty}$ は $V_N(z_\infty)$ を無限遠に挿入したときに相関関数が正則になるために必要な因子です。これは、CFT の状態・演算子対応の意味で $V_N(z_\infty)$ に対応した状態を経路積分の終状態に設定したことに対応しています。エッジモードの議論をする際にはこの方法の方が便利であるため、6.3 ではこの表式を使っています。

[*18]

$$\int \mathrm{d}^2z'\ln|z-z'|^2 \sim \pi|z|^2 + (\text{定数}) \tag{5.9}$$

という相関関数を計算すればよく、これは

$$\Psi(\{\eta_j\};\{z_i\}) = \prod_{k<l}(\eta_k-\eta_l)^{1/m}\prod_{i,j}(z_i-\eta_j)\prod_{i<i'}(z_i-z_{i'})^m e^{-\sum_i |z_i|^2/(4l^2)-\sum_j |\eta_j|/(4ml^2)} \tag{5.12}$$

となって (4.27) の一般化になっていることが読み取れます。

ところで、一般の FQH に対しては、準正孔の演算子はどのように決めればよいでしょうか？この問題に答えるための指導原理となるのは、「波動関数が z_i について特異でない一価関数になっていなければならない」という条件です。その前に、そもそも電子は FQH を作る物理的な粒子なので、CFT の中で単純カレント（他のプライマリ場とのフュージョンが一意に決まるような演算子）になっていなくてはいけません。このことは、UMTC の言葉で、基底状態の縮退度を変えない量子次元 1 の粒子でなくてはいけない、と言い換えても構いません。したがって ψ_e と H のフュージョンは一意に決まり、これを ψ_f とすると、ψ_e と H の演算子積展開（OPE）は、

$$\psi_e(z)H(\eta) \sim \frac{\psi_f(\eta)}{(z-\eta)^{h_e+h_H-h_f}} \tag{5.13}$$

のように与えられます。波動関数が $\{z_i\}$ のブランチカットや極をもたないために右辺は正則でなくてはならず、ここから

$$-h_e-h_H+h_f \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ (\text{負でない整数}) \tag{5.14}$$

という条件がしたがいます。この条件は許される準正孔励起に強い制約を与えます。

上で見た Laughlin 状態での準正孔演算子の場合、OPE が

$$\psi_e(z)H(\eta) \sim (z-\eta) : e^{i(\sqrt{m}+1/\sqrt{m})\phi(\eta)} : \tag{5.15}$$

であることから、この条件をしっかり満たしていることが読み取れます。言い換えれば、このような励起 $H(\eta)$ を挿入しても、波動関数が電子 z_i について一価であることが保証されるのです。また、この条件を満たすような最小の電荷をもつ演算子は上で定義したような $: e^{i\sqrt{1/m}\phi(\eta)} :$ であり、これを準正孔演算子と同定することができたというわけです。

ポイント 17

電子の演算子は CFT の単純カレントである。また、FQH で許される準正孔励起の条件は、

$$-h_e-h_H+h_f \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{5.16}$$

5.1.3 コンパクト化の応用

Laughlin 状態に対しては、コンパクト化したボゾンの CFT を使うと見通しが良くなる場合があります。電子の演算子と準正孔の演算子を頂点演算子で表したときの電荷をそれぞれ p, q とすると、それらのフュージョン f の電荷は $p+q$ なので、条件 (5.14) は具体的に

$$-\frac{p^2}{2}-\frac{q^2}{2}+\frac{(p+q)^2}{2} = n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{5.17}$$

とでき、これは単に

$$q = \frac{n}{p} \tag{5.18}$$

と簡約されます。すなわち、物理的に許される準正孔の頂点演算子は、$: e^{i(n/p)\phi(\eta)} :$ の形をしたものだけ、ということになります。

ここで、$\phi \sim \phi + 2\pi R$ のように、半径 R にコンパクト化したボゾンの CFT を考えてみましょう。このとき、準正孔の演算子 $:e^{iq\phi(z)}:$ には同一視

$$:e^{iq\phi(z)}: \sim e^{2\pi iqR} :e^{iq\phi(z)}: \tag{5.19}$$

が入りますが、これによって、$qR = n \in \mathbb{Z}$ という制約が入ります。一方、この制約は、$R = p$ と取れば (5.18) にほかなりません。

したがって、許される準正孔の演算子に対する条件 (5.14) は、$R = p$ とすることで CFT のデータに自然に取り込むことができます。$\nu = 1/m$ の Laughlin 状態では $p = \sqrt{m}$ であったので、「Laughlin 状態の半径 $R = \sqrt{m}$ にコンパクト化した CFT で記述される」と言い換えることができるわけです。

5.2　K 行列との対応

3.5 節で見たように、一般の可換 FQH は K 行列を用いて表すことができました。波動関数と CFT 相関関数の関係を使うことで、この K 行列から出発して対応する波動関数を得ることができます。本節では、このレシピを見ていきましょう。

5.2.1　一般論

以下では、具体的な描像として、n 個のレイヤーからなる系の電子が協同的に FQH をなしている場合を考えます。このとき、有効理論は $n \times n$ の K 行列 $(K_{\alpha\beta})$ と t ベクトル $t = [1, 1, \cdots, 1]^\top$ で記述されたのでした。

まず、これを $k(\geq n)$ 次ベクトルの n 個組 $\{\vec{Q}^{(\alpha)}\}_{\alpha=1,2,\cdots,n}$ を用いて、以下のように分解します。

$$K_{\alpha\beta} = \vec{Q}^{(\alpha)} \cdot \vec{Q}^{(\beta)} \tag{5.20}$$

$Q_{\alpha a} = Q_a^{(\alpha)}$ を下三角行列に取ったとき、これは正定値行列の **Cholesky 分解**（***Cholesky decomposition***）と呼ばれており、正定値・非退化・対称である物理的な K 行列に対してはいつでも実行することができます。次に、$\langle \phi_a(z)\phi_b(w)\rangle = -\delta_{ab}\ln(z-w)$ となるように規格化された k フレーバーのカイラルボゾン場 $\vec{\phi}(z) = [\phi_1(z), \cdots, \phi_k(z)]^\top$ を用意し、頂点演算子

$$V_\alpha(z) \equiv :e^{i\vec{Q}^{(\alpha)}\cdot\vec{\phi}(z)}: \tag{5.21}$$

を定義します。このようにして定義した V_α は、α 番目のレイヤーの電子に対応する演算子（Laughlin 状態における $:e^{i\sqrt{m}\phi(z)}:$ の一般化）になっています[*19]。また、これによって異なるレイヤーの電子間の相関関数を計算すると $\langle V_\alpha(z)V_\beta(w)\rangle = (z-w)^{K_{\alpha\beta}}$ となり、Jastrow 因子の一般化を与えています。

さて、α 番目のレイヤーの電子数を N_α とすると、各レイヤーでの電子の電荷を打ち消すために挿入するべき背景電荷は

$$\mathcal{O}_{\mathrm{bg}} =: \exp\left[-i\rho_0 \int \mathrm{d}^2 z' \frac{N_\alpha}{N} \vec{Q}^{(\alpha)} \cdot \vec{\phi}(z')\right]: \tag{5.22}$$

と分かります。ここに、ρ_0 は全レイヤーあわせた電子密度（$\int \mathrm{d}^2 z \rho_0 = \sum_\alpha N_\alpha$）です。

したがって、波動関数は、ガウシアン因子を省略すると

$$\Psi_{K_{\alpha\beta}}(\{z_i^{(\alpha)}\}) = \left\langle \prod_{(i,\alpha)} V_\alpha(z_i^{(\alpha)}) \mathcal{O}_{\mathrm{bg}} \right\rangle = \prod_{\alpha,\beta}\prod_{i<j} (z_i^{(\alpha)} - z_j^{(\beta)})^{K_{\alpha\beta}} \tag{5.23}$$

で与えられます。

[*19] K 行列を t ベクトルの階層表示（階層的な構成から自然に現れる表示 $t = [1, 0, \cdots, 0]^\top$）では電子の演算子が n 個必要なことは自明ではないかもしれません。一方、スピンやレイヤー自由度、バレー自由度などいくつかのフレーバーをもつ電子系の FQH を K 行列と対称表示の t ベクトル（$t = [1, 1, \cdots, 1]^\top$）で表示していると考えると、各フレーバーの電子と解釈できます。これを念頭に置いて読み進めてください。

5.2.2 具体例：Halperin の (mmn) 状態

では、具体的に K 行列 (3.54) で記述される FQH に対して、前節の計算を実行して波動関数を求めてみましょう。これは、3.5 節でも触れた Halperin の (mmn) 状態を記述する K 行列です。まず、K 行列の Cholesky 分解は

$$K = \begin{bmatrix} \sqrt{m} & 0 \\ n/\sqrt{m} & \sqrt{(m^2-n^2)/m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{m} & n/\sqrt{m} \\ 0 & \sqrt{(m^2-n^2)/m} \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

となるので、$\vec{Q}^{(1)} = [\sqrt{m}, 0]^\top$ と $\vec{Q}^{(2)} = [n/\sqrt{m}, \sqrt{(m^2-n^2)/m}]^\top$ を用いて 2 レイヤーの電子演算子を

$$\begin{aligned} V_1(z) &=: \exp\left[i\sqrt{m}\phi_1(z)\right] :, \\ V_2(z) &=: \exp\left[i\left(\frac{n}{\sqrt{m}}\phi_1(z) + \sqrt{\frac{m^2-n^2}{m}}\phi_2(z)\right)\right] : \end{aligned} \tag{5.25}$$

と定義できます。

したがって、(5.23) に対応する波動関数は

$$\Psi_{(mmn)}(\{z_i^{(\alpha)}\}) = \prod_{i<j}^{N^\uparrow}(z_i^\uparrow - z_j^\uparrow)^m \prod_{i<j}^{N^\downarrow}(z_i^\downarrow - z_j^\downarrow)^m \prod_{i<j}(z_i^\uparrow - z_j^\downarrow)^n \tag{5.26}$$

となり、(mmn) 状態の波動関数 (4.20) が再現されました。3.5 節では、(3.54) をもつ状態として (mmn) 状態を定義してフィリング $\nu = 2/(m+n)$ を求め、4.2 節では、実際にそのフィリングをもつ波動関数の候補を構成しましたが、CFT の手法を通じてようやくこれらの状態が同一であることが確認できました。

5.3 非可換 FQH のバルク CFT

これまで見てきた可換 FQH のバルク CFT の特徴の一つは、共形ブロックの空間が 1 次元であることでした。その結果、準正孔 η_1, η_2 があるとき、$\eta_1 = \eta_2$ で波動関数は特異点をもち、η_1 を η_2 のまわりに一周させると（正則ゲージの）波動関数は別のリーマン面に行き余分な位相（モノドロミー）を獲得してしまうのでした。

一方、非可換 FQH の場合には、状況はより悪くなります。この場合は一般に共形ブロックの空間は 2 以上の次元をもつため、波動関数（＝共形ブロック）は多成分となり、η_1 を η_2 のまわりに一周させると波動関数にはユニタリ行列がかかることになります。

以下では、非可換 FQH に対する共形ブロックの扱い方を、いくつかの具体例を通じて見ていきます。

5.3.1 共形ブロック

さて、非可換 FQH に対して、多成分の波動関数がどのように記述されるかを一般的に見ていきましょう [Nayak and Wilczek, 1996; Ardonne and Sierra, 2010]。準正孔があるときの波動関数 $\Psi(\{\eta_j\};\{z_i\})$ は、共形ブロックの空間の基底 $\{\Psi_\alpha(\{\eta_j\};\{z_i\})\}$ を用いて

$$\Psi(\{\eta_j\};\{z_i\}) = \sum_\alpha c_\alpha \Psi_\alpha(\{\eta_j\};\{z_i\}) \tag{5.27}$$

のように展開できます。ベクトル空間の構造を意識してもっとあからさまに書けば、$\{\eta_j; z_i\}$ を固定した上で

$$|\Psi\rangle = \sum_\alpha c_\alpha |\Psi_\alpha\rangle \tag{5.28}$$

という書き方もできます。

このとき、たとえば準正孔 η_i を η_j の周りに一周させてブランチカットを横切り、もとの位置に戻ってきたとしましょう。このとき、準正孔の座標は変わっていないので $\{|\Psi_\alpha\rangle\}$ は不変ですが、このプロセスで

$$c_\alpha \mapsto U_{\alpha\beta} c_\beta \tag{5.29}$$

のように共形ブロックの空間の中で波動関数はユニタリ変換されます。可換 FQH のときには単に位相因子だったものが、非可換 FQH では**モノドロミー行列（*monodromy matrix*）**$U_{\alpha\beta}$ に格上げされたのです。したがって、準正孔のブレイディングの操作は一般に非可換になります。

5.3.2 具体例：Moore-Read 状態

さて、次に非可換 FQH の具体例として、4.6 節で見た $\nu = 1/2$ の Moore-Read 状態が、どのように CFT の言葉で記述されるか見ていきます。3.5 節で見たように、Moore-Read 状態のエニオン励起 $\{1, \sigma, \psi\}$ は、Ising 模型のフュージョン則にしたがうのでした。そこで、Ising CFT での記述ができないだろうかと考えてみると、波動関数 (4.37) に含まれるパフィアンの因子が、Ising CFT のプライマリ場 $\psi(z)$ の相関関数として

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right) = \mathcal{A}\left(\frac{1}{z_1 - z_2}\frac{1}{z_3 - z_4}\cdots\right) = \langle\psi(z_1)\psi(z_2)\cdots\psi(z_N)\rangle \tag{5.30}$$

と書けることが分かります。また、残りの因子は $\nu = 1/2$ の Laughlin 状態にも現れる Jastrow 因子であり、電子の演算子を

$$\psi_e(z) = \psi(z) : e^{i\sqrt{2}\phi(z)} : \tag{5.31}$$

と定義すると、適切な背景電荷 $\mathcal{O}_{\mathrm{bg}}$ をともなって Moore-Read 波動関数が

$$\Psi_{\mathrm{MR}}(\{z_i\}) = \left\langle \prod_i \psi_e(z_i)\mathcal{O}_{\mathrm{bg}} \right\rangle \tag{5.32}$$

として再現されます。確認しておくと、電子の演算子 (5.31) は、単純カレントでかつ共形ウェイト $h_e = 1 + 1/2 = 3/2$（半整数）をもっており、確かにフェルミオニックな自由度になっています。

さらに、条件 (5.14) を満たすような最小の電荷をもった準正孔の演算子を探すと、

$$\psi_{\mathrm{qh}}(\eta) = \sigma(\eta)H(\eta) = \sigma(\eta) : e^{i\phi(\eta)/2\sqrt{2}} : \tag{5.33}$$

のように作れることが分かります。実際、OPE を計算すると、

$$\psi_e(z)\psi_{\mathrm{qh}}(\eta) \sim \frac{\sigma(\eta)}{(z-\eta)^{1/2}} \cdot (z-\eta)^{1/2} : e^{i(\sqrt{2}+1/(2\sqrt{2}))\phi(\eta)} :\sim \sigma(\eta) : e^{i(\sqrt{2}+1/(2\sqrt{2}))\phi(\eta)} : \tag{5.34}$$

となり、最右辺は極やブランチカットをもたない正則な項になっていることが確認できます。

以上より、準正孔が M 個励起した Moore-Read 状態の波動関数を、

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathrm{MR},\alpha} &= \langle\sigma(\eta_1)\cdots\sigma(\eta_M)\psi(z_1)\cdots\psi(z_N)\rangle_\alpha \langle H(\eta_1)\cdots H(\eta_M)V(z_1)\cdots V(z_N)\mathcal{O}_{\mathrm{bg}}\rangle \\ &= \langle\sigma(\eta_1)\cdots\sigma(\eta_M)\psi(z_1)\cdots\psi(z_N)\rangle_\alpha \prod_{i<j}(\eta_i-\eta_j)^{1/8}\prod_{i,j}(z_i-\eta_j)^{1/2}\prod_{i<j}(z_i-z_j)^2\end{aligned} \tag{5.35}$$

と書き下すことができました。最後の表式には $(z_i - \eta_j)^{1/2}$ が含まれているので、本当に正則になっているか疑問に思うかもしれませんが、Ising セクター $\langle\sigma(\eta_1)\cdots\sigma(\eta_M)\psi(z_1)\cdots\psi(z_N)\rangle_\alpha$ からの寄与が打ち消して全体としては正則になっています。また、Ising CFT の非可換性から、$\langle\sigma(\eta_1)\cdots\sigma(\eta_M)\psi(z_1)\cdots\psi(z_N)\rangle_\alpha$ の部分はもはや 1 次元ではありえず、共形ブロックの空間の一つの基底（α でラベル）になっています。

一般的な表式は複雑なのでここでは述べませんが、簡単な例として、準正孔 4 つの擬波動関数を CFT の一般論にしたがって計算した結果を書き下しておくと、

$$\lim_{w\to\infty}\langle\psi_{\mathrm{qh}}(0)\psi_{\mathrm{qh}}(\eta)\psi_{\mathrm{qh}}(1)\psi_{\mathrm{qh}}(w)\mathcal{O}_{\mathrm{bg}}\rangle \sim a_+\Psi_+(\eta, w) + a_-\Psi_-(\eta, w) \tag{5.36}$$

のようになることが知られています [Belavin et al., 1984; Zuber and Itzykson, 1977]。ここで、共形ブロックの空間の基底

$$\Psi_\pm \sim w^{1/4}\sqrt{1 \pm \sqrt{1-\eta}} \quad (|w| \gg |\eta|) \tag{5.37}$$

でもとの波動関数を展開した表式になっています。したがって、準正孔の位置を固定すると、波動関数は 2 次元スピノル $\Psi = [a_+, a_-]^\top$ で指定されることになります。

これを用いて、準正孔のブレイディングがどのように表現されるか具体的に見ていきましょう。まず、w が 3 つの準正孔のまわりを一周する場合を考えてみます。このとき、$w \mapsto e^{2\pi i} w$ となるので、モノドロミーは

$$\begin{bmatrix} a_+ \\ a_- \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} e^{i\pi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_+ \\ a_- \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

のようになります。位相因子がつくだけ、という意味ではこれは可換 FQH のときと同じです。一方、たとえば η が準正孔 1 の周りを一周する場合を考えてみると、$(\eta - 1) \mapsto e^{2\pi i}(\eta - 1)$ となるので、$\Psi_\pm$ が入れ替わって

$$\begin{bmatrix} a_+ \\ a_- \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_+ \\ a_- \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

となります。これは共形ブロックの空間の中の非自明なユニタリ変換になり、非可換 FQH に現れる特有の構造にほかなりません。

5.3.3　ユニタリ性・有理性についての補足

では、ここで少し閑話休題して、Moore-Read 予想とは逆に「与えられた CFT に対して、それをバルク CFT とする FQH はいつでも存在するか？」という問いを考えてみましょう。

（準備中）

5.4　可換 FQH の階層性

4.5 節では、親状態の波動関数から次の娘状態の波動関数を準正孔励起の擬波動関数との畳み込みとして定義しました。この定義は物理的な意味が明快である一方で、積分を具体的に実行するのは困難であり、Jain 系列などの複合フェルミオン描像との繋がりも明確ではありません。しかし、CFT の方法を使えば、これらの描像を統一的に見ることができます [Bergholtz et al., 2008; Suorsa et al., 2011a,b] 。

5.5　非可換 FQH の階層性

ここまで、可換 FQH の階層性について議論してきました。可換 FQH には、Chern-Simons 理論の立場からは K 行列の方法が、多体量子力学の立場からは Haldane-Halperin の方法がそれぞれ知られており、非常によく体系的に整理されています。そこで、「非可換 FQH にも同様の構造がないだろうか？」と考えるのは自然な疑問です。しかし、前節までの議論を非可換 FQH にナイーブに一般化しようとすると、ただちに問題にぶつかります。そもそも、可換 FQH で階層性が議論できたのは (4.29) の積分が定義できていたからにほかなりません。一方、非可換 FQH では共形ブロックの空間が 1 次元でないので、η_i をリーマン面上でぐるぐる動かすと、ブランチカットを横切るごとに他の状態に変わってしまいます。そのような理由から、非可換 FQH の階層構造は、未だ十分には理解されていません。

しかし、いくつかの特定のクラスの非可換 FQH に対しては、可換 FQH に帰着させて階層性の構造が議論できる場合があります。以下では、可換 FQH に帰着させる方法として、具体例を使いながら 3 つの異なる方法を見ていきます。

5.5.1　Bonderson-Slingerland 階層性

[Bonderson and Slingerland, 2008] は、非可換 FQH を土台に、可換 FQH の階層構造を構成する方法を提案しました。非可換エニオンがマクロな数だけ励起しているとき、フュージョンのチャンネル同士の縮退が解け、これらのエニオンが可換エニオンにフュージョンするようなチャンネルが特に安定化すると仮定することで、系の励起が本質的に可換エニオンによって支配されると考えたのです。

具体的に Moore-Read 状態で見ていきます。Moore-Read 状態での準正孔は、(5.33) で与えられますが、これらが 2 つペアになってフュージョンした結果は

$$\psi_{\mathrm{qh}}(\eta)=\mathbf{1}:e^{i\sqrt{1/2}\phi(\eta)}: \qquad \text{あるいは} \qquad \psi_{\mathrm{qh}}(\eta)=\psi(\eta):e^{i\sqrt{1/2}\phi(\eta)}: \tag{5.40}$$

のいずれかになります。ここでの仮定は、このうちのいずれかがエネルギー的に安定になって選択される、というものです。これらの新たな「準正孔」演算子を見てみると、$:e^{i\sqrt{1/2}\phi(\eta)}:$ の部分は $\nu=1/2$ の Laghlin 状態の準正孔と同じになっており、これらが階層的に可換な娘状態を形成すると考えることができます。

このように、非可換 FQH に含まれる可換なセクターだけを階層化させて新たな非可換 FQH を得る構成を、**Bonderson-Slingerland 階層性（*Bonderson-Slingerland hierarchy*）**[Bonderson and Slingerland, 2008] と呼びます。

5.5.2 Levin-Halperin 階層性

次に、[Levin and Halperin, 2009] によって提案された非可換 FQH の階層構造を紹介します。そもそも、可換 FQH で階層性が議論できたのは、(4.29) の積分の中で、親状態の波動関数のモノドロミーが準正孔の擬波動関数のモノドロミーとちょうど打ち消し、あわせてブランチカットがうまく消えていたからだったのでした。そして、非可換 FQH ではモノドロミーは一般にユニタリ行列の形になり、これは単なる位相因子だけでは打ち消せない点が困難だったことは上でも述べました。しかし、親状態の波動関数と準正孔の擬波動関数であわせて（正則部分と反正則部分を両方もつ）モジュラー不変な CFT になるようにすることで、これらのブランチカットをうまく打ち消すことができます。

この構成を具体的に Moore-Read 状態で見てみます。波動関数 (5.35) に含まれるブランチカットを打ち消す準正孔の擬波動関数として

$$\overline{\Phi_\alpha(\{\eta_j\})}=\left\langle\prod_j\overline{\sigma}(\bar\eta_j):e^{i\sqrt{2m+(1/8)}\;\overline{\phi}(\bar\eta_j)}:\mathcal{O}_{\mathrm{bg}}\right\rangle_\alpha \tag{5.41}$$

を用意します。ここで、m は整数のパラメータで、ボゾン $\overline{\phi}$ の部分について相関関数を計算することで、準正孔がこの擬波動関数において

$$\nu_{\mathrm{qh}}=\frac{1}{2m+(1/8)}=\frac{8}{16m+1} \tag{5.42}$$

のフィリングをもつと読み取れます。

これを (5.35) と共形ブロックの空間での内積として組み合わせると、娘状態の波動関数

$$\Psi(\{z_i\})=\int\prod_j\mathrm{d}^2\eta_j\sum_\alpha\overline{\Phi_\alpha(\{\eta_j\})}\Psi^\alpha_{\mathrm{MR}}(\{\eta_j\};\{z_i\}) \tag{5.43}$$

を得ることができました。ここで被積分関数に含まれる

$$\left\langle\prod_j\sigma(\eta_1,\bar\eta_1)\cdots\right\rangle=\sum_\alpha|\mathcal{F}_\alpha(\{\eta_i\})|^2 \tag{5.44}$$

はモジュラー不変な CFT の相関関数で、カイラル CFT の正則な共形ブロック

$$\mathcal{F}_\alpha(\{\eta_j\})=\langle\sigma(\eta_1)\cdots\rangle_\alpha \tag{5.45}$$

と、その共役である反正則な共形ブロックが組み合わせれた結果、全体としてブランチカットをもたない構造になっています。

娘状態のフィリングを計算しておきます。まず、初めの電子数を N_e とし、合計の EM フラックス（$2N_e$ 本）を固定したまま、いくらかの電荷を取り去ったと考えて計算を進めます。親状態の波動関数に含まれる

$\prod_i(\eta - z_i)^{1/2}$ の因子から、準正孔は 1 つの電子を 1/2 本のフラックスとして感じることが分かるので、準正孔が感じる有効的なフラックスは（準正孔の密度が十分低いとすると最低次の近似で）$N_e/2$ 本です。この準正孔は（準正孔が感じる有効的なフラックスに対して）$\nu_{\mathrm{qh}} = 8/(16m+1)$ のフィリングをもつとしていたので、準正孔の個数は

$$\frac{N_e}{2}\frac{8}{16m+1} \tag{5.46}$$

であることが分かります。また、EM 電荷は頂点演算子の電荷に比例するので、電荷 $1/(2\sqrt{2})$ の準正孔 $:e^{i\phi(\eta)/2\sqrt{2}}:$ は EM 電荷 1/4 をもつと分かり、これらのことから準正孔のになう EM 電荷は合計で

$$\frac{1}{4}\frac{N_e}{2}\frac{8}{16m+1} \tag{5.47}$$

です。したがって、娘状態での EM 電荷の合計は

$$N_e\left(1 - \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{8}{16m+1}\right) = \frac{16mN_e}{16m+1} \tag{5.48}$$

であると導けます。また、娘状態のフィリングを ν とすると、EM フラックスの本数を前後で比較して

$$2N_e = v^{-1}\frac{16mN_e}{16m+1} \tag{5.49}$$

となり、これを解いて結局フィリング

$$\nu = \frac{8m}{16m+1} \tag{5.50}$$

が得られました。

このように、もとの波動関数のブランチカットを打ち消すように準正孔の擬波動関数を用意し、非可換エニオンを凝縮させて新たな FQH を得る構成を、**Levin-Halperin 階層性**（***Levin-Halperin hierarchy***）[Levin and Halperin, 2009] と呼びます。

この構成は、親状態の UMTC$\mathcal{C}$ に別の UMTC$\mathcal{D}$ を組み合わせ、$\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ の中でエニオン凝縮を考えることで娘状態 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}/\mathcal{A}$ を得る、という代数的な形式として [Zhang et al., 2025a] において一般化されました。これについては、8 章で少し触れます。

5.5.3 Hermanns 階層性

[Hermanns, 2010]

（準備中）

この章のまとめ

- FQH 波動関数は CFT の共形ブロックとして記述され、電子や準粒子は特定の共形ウェイトを持つ頂点演算子の挿入に対応する。
- 非可換 FQH では共形ブロックの空間が多次元化し、準粒子の交換はモノドロミー行列によるユニタリ変換として非可換統計に従う。
- 準粒子の凝縮と CFT のモノドロミー条件を整合させることで、Bonderson-Slingerland 等の非可換 FQH の階層構造が構成される。

この章についてくわしく

- （準備中）

6 エッジの理論としての CFT

前章では、バルクの物理を記述する手法として CFT の方法を見てきました。ここまで使ってきた 2 次元 CFT は、$z = x + iy$ という空間の複素座標に対する $(2+0)$ 次元 CFT だったわけです。しかし、実は FQH で CFT が果たす役割はもう一つあり、それはエッジモードの記述です。空間 2 次元の系のエッジは時間 1 次元＋空間 1 次元をもつので、今度は時空の複素座標に対する $(1+1)$ 次元 CFT として現れます。この CFT を、与えられた FQH の**エッジ CFT（edge CFT）**と呼びます。

本章では、前章までとは雰囲気を変えて、エッジ CFT の記述する物理を紹介していきたいと思います。

この章のキーワード

- エッジ CFT
- 朝永・Luttinger 液体
- ボゾン化

6.1 可換 FQH のエッジ理論

本節では、液滴の形状を変える電子の運動としてエッジ励起を半古典的に位置づける方法を使って、エッジの物理を記述する理論を導いていきます [Chang, 2003; Wen, 1992]。

また、7 では、バルクの Chern-Simons 理論をバウンダリをもった空間多様体上で定義し、そのゲージ不変性からエッジに現れるべき理論として同じスペクトラムを得ます。いずれの場合も、線形分散をもったエッジモードがエッジを伝播する音速 v は、エッジでの相互作用の詳細に依存するためバルクの情報からは決めることができず、理論のインプットとして手で加えなくてはいけません。しかし、エッジの理論のもつ対称性や構造それ自体は、以下で見るように、バルクの理論と対応させてよく理解することができます。

6.1.1 液滴の表面波としてのエッジ理論

エッジモードは、半古典的には、サイクロトロン円運動をする電子の**スキップ運動（*skipping motion*）**として理解することができます。これは、エッジ付近をサイクロトロン円運動する電子が、エッジで「跳ねて」、平均的に一方向だけに伝播する運動のことです。このとき、電子を液滴に閉じ込めるエッジ付近の電場を E とすると、エッジ近傍でこの電場から受ける力と磁場 B から受けるローレンツ力が釣り合う条件から、スキップ運動の音速 $v = E/B = El^2$ がしたがいます。最初の定式化のモチベーションは、「この運動をどう量子化するか？」という点から始まりました。

簡単のために、$y < 0$ 領域がある FQH で満たされているとし、真空との境界 $y = 0$ を正の向きに伝播するエッジモードを考えましょう。エッジの微小な変位を $h(x)$ としたとき、エッジに現れる余分なの電荷密度は、最低次の近似で $\rho(x) = \bar{n}h(x)$ と書くことができます。ここで、$\bar{n} = \nu/(2\pi l^2)$ はバルクの電荷密度です ($1/(2\pi l^2)$ が単位面積あたりの LLL の縮退度なのでした)。x 方向に音速 v で伝播することから、エッジモードのしたがうカイラルな波動方程式

$$(\partial_0 - v\partial_x)\rho(x) = 0 \tag{6.1}$$

が得られます。

エッジ近傍での電子の感じるポテンシャルを最低次の近似で $V(y) = Ey$ とすると、ハミルトニアンは $\rho(x)$ を力学変数として

$$H = \int \mathrm{d}x \int_0^{h(x)} \mathrm{d}y V(x,y)\bar{n} = \frac{\pi v}{\nu} \int \mathrm{d}x \rho(x)^2 \tag{6.2}$$

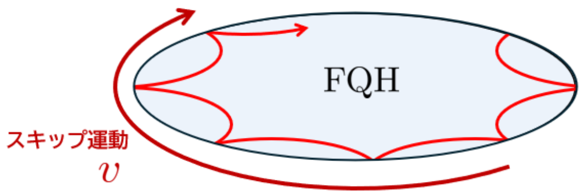


図 6　FQH のエッジモードの半古典的な描像（電子のスキップ運動）

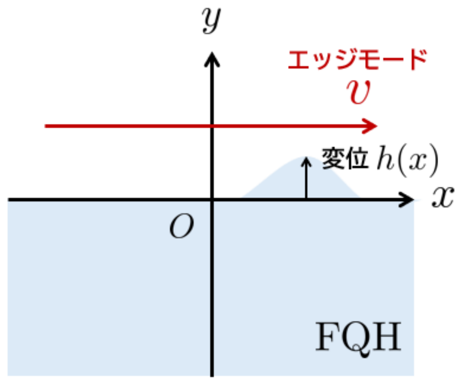


図 7　x 軸正の向きに伝播するエッジモード

とできます [Wen, 1992]。最後の等号では、$v = El^2$ を用いました。

また、運動量空間で $\rho_k = (1/\sqrt{L}) \int \mathrm{d}x e^{-ikx} \rho(x)$ を用いると、

$$H = \frac{2\pi v}{\nu} \sum_{k>0} \rho_k \rho_{-k} \tag{6.3}$$

が得られ、運動量空間での (6.1)$(\partial_0 - ivk)\rho_k = 0$ とあわせることで、ρ_k の共役運動量 Π_k の表式 $\Pi_k = (2\pi i/\nu k)\rho_{-k}$ $(k > 0)$ がしたがいます。このことから、量子化のために課すべき正準交換関係 $[\rho_k, \Pi_{k'}] = i\delta_{k-k',0}$ は

$$[\rho_k, \rho_{k'}] = \frac{\nu k'}{2\pi} \delta_{k+k',0} \tag{6.4}$$

となり、ρ_k は U(1) の**カッツ・ムーディ代数（*Kac-Moody algebra*）**にしたがう場であることが分かります。また、ハミルトニアンと場の交換関係

$$[H, \rho_k] = v\rho_k \tag{6.5}$$

から、ρ_k はエネルギー v の生成演算子であり、エッジモードは相互作用しない（また、カイラルな）フォノンの理論によって記述できることが結論できます。

さて、ここまではエッジを伝播する電子の密度のしたがう理論について考えてきました。実は、これはギャップレスな量子 1 次元系なので、ボゾン化の手法にしたがって IR の物理をボゾニックな自由度で表すことができます。ボゾン化の基礎事項については付録 D を参照してください。ボゾン化の一般論より、EM 電荷密度 $\rho(x)$ および電子の生成演算子 $\Psi_e(x)$ を

$$\rho(x) = \frac{\partial_x \varphi(x)}{2\pi}, \qquad \Psi_e(x) = V_{1/\nu} =: e^{i(1/\nu)\varphi(x)} : \tag{6.6}$$

と表し、$\varphi(x)$ に対して交換関係

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = i\nu\pi \ \mathrm{sgn}(x - x') \tag{6.7}$$

を課すと、(6.4) を含む種々の交換関係が再現されます。$V_\alpha(x)$ は一般に EM 電荷 $\nu\alpha$ の励起の生成演算子となるのですが、これは EM 電荷密度との交換関係

$$[\rho(x), V_\alpha(x')] = \nu\alpha V_\alpha(x)\delta(x - x') \tag{6.8}$$

を見ることにより正当化できます。また、(6.7) の両辺を x で微分して整理すると

$$\left[\frac{\partial_x \varphi(x)}{2\pi\nu}, \varphi(x')\right] = i\delta(x - x') \tag{6.9}$$

が得られ、$\varphi(x)$ の正準共役運動量が $-\partial_x\varphi(x)/(2\pi\nu)$ であることが分かります。このことからラグランジアンを書き下すことができて

$$\mathcal{L}_{\text{edge}} = \frac{\partial_x\varphi}{2\pi\nu}\cdot\partial_0\varphi - \frac{\pi v}{\nu}\left(\frac{\partial_x\varphi}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{4\pi\nu}\left[(\partial_x\varphi)(\partial_0\varphi) - v(\partial_x\varphi)^2\right] \tag{6.10}$$

と、エッジモードをボゾン場で記述する理論が得られました [Wen, 1992]。ちなみに、電子の生成演算子 $\Psi_e(x)$ がフェルミオニックな統計

$$\Psi_e(x)\Psi_e(x') = -\Psi_e(x')\Psi_e(x) \tag{6.11}$$

にしたがうのはフィリングが $\nu = 1/m$（m：奇数）となるときのみなので、ここまでで議論した U(1)Kac-Moody 代数の対称性をもった理論で記述できるのはフェルミオニックな Laughlin 状態だけです。非可換 FQH などのより複雑な FQH のエッジモードの記述にはより大きい対称性をもった理論が必要ですが、基本的なストーリーは同じです。

6.2　エッジ励起の波動関数

さて、4.2 節では、Laughlin 波動関数を基底状態に持つようなポテンシャルとして、Haldane の擬ポテンシャル (4.14) を導入しました。$\nu = 1/m$ のとき、波動関数が $z_i \to z_j$ の近傍で m 乗以上に速い減衰をしていれば、この擬ポテンシャルの基底状態となることはすでに述べました。

6.3　エッジ CFT と対称多項式

（準備中）

6.3.1　具体例：Laughlin 状態

4.2 節で見たように、$\nu = 1/3$ の Laughlin 状態の波動関数 (4.13) は、$m = 3$ での Haldane の擬ポテンシャル (4.14)

$$V(z) = -C_1\bar{\partial}\delta(z)\partial \tag{6.12}$$

の基底状態になっていたのでした。また、z_i と z_j が近付いたとき 3 乗以上の速さで減衰するような波動関数は、すべてこの擬ポテンシャルの基底状態になっている、ということはすでに述べました。4.2 では、3 乗で減衰するような Jastrow 因子 $\Phi_3 = \prod_{i<j}(z_i - z_j)^3$ で表される Laughlin 波動関数だけを考えましたが、より高次のべきを含むような他の基底状態を考えることもできます。

このような基底状態の波動関数は、フェルミオンの反対称性を考えると、一般に

$$\Phi(\{z_i\}) = P(\{z_i\})\Phi_3(\{z_i\}) \tag{6.13}$$

の形で表されます。ここで、$P(\{z_i\})$ は $\{z_i\}$ の正則な対称多項式です。LLL の波動関数は正則でなくてはならなかったので、そこから $P(\{z_i\})$ の正則性もしたがいます。

さて、実は (6.13) のようにより高い角運動量をもつ波動関数は、FQH のエッジ励起を記述しています。このことは、以下のような物理的な考察から分かります [Wen, 1995]。で議論したように、Laughlin 波動関数の最大べき $m_{\max}$ は系の最大角運動量 $L_{\max}$ と等しく、半径 R の液滴の FQH を半古典的に考察することで、これはサイクロトロン半径が R となる軌道の角運動量であることがしたがうのでした。したがって、これよりも高い角運動量をもつ電子の運動は、サイクロトロン円運動ではありえません。また、液滴の内部は FQH 状態で非圧縮なので、液滴の面積を変えるような励起は低エネルギーでは生じません。このことから、高い角運動量の状態は、液滴の面積を変えずに液滴の形状だけを変化させるモードに対応します。このようなモードは波数 k ごとに分解することができ、その意味で、対称多項式 $P(\{z_i\})$ は有限の波数をもってエッジを伝播する励

起に対応していると言えるわけです。以下では、この対称多項式 $P(\{z_i\})$ の構造とエッジモードとの対応関係を見ていきます。

まず、(6.13) の最大角運動量（最大べき）を M とし、Jastrow 因子と対称多項式からの寄与をそれぞれ $M_0, \Delta M$ とすると、

$$M = M_0 + \Delta M = 3\binom{N}{2} + \Delta M \tag{6.14}$$

のように書けます。一般の対称多項式 $P(\{z_i\})$ は、

$$s_n \equiv \sum_i z_i^n = z_1^n + z_2^n + \cdots + z_N^n \tag{6.15}$$

の積を基底としてその線形結合として生成されるので、ここから各 ΔM を与える対称多項式の重複度を求めることができます。まず、$\Delta M = 0$ および $\Delta M = 1$ に対しては、それぞれ s_0 および s_1 が対応し、重複度はいずれも 1 です。次に、$\Delta M = 2$ のモードを考えると、s_1^2 と s_2 があるので重複度は 2 になります。また、$\Delta M = 3$ では、$s_1^3, s_1 s_2, s_3$ があるので重複度は 3 です。このように角運動量ごとに重複度を数え上げていくと、以下の結果が得られます。

$$\begin{array}{rcccccccc} \Delta M: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \text{重複度}: & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & \cdots \end{array} \tag{6.16}$$

ここで、

（準備中）

6.4　CFT の方法

ここまで、可換 FQH のエッジモードについて議論してきました。しかし、上で議論したような朝永・ラッティンジャー液体とボゾン化を用いた方法は、U(1)Chern–Simons 理論で記述できない非可換 FQH には適用することができません。そこで、非可換 FQH を含むより広いクラスのエッジモードを記述する方法として、エッジ CFT を用いた方法を紹介していきます。

6.4.1　具体例：Laughlin 状態

エッジモードを議論する際により便利な表式として、リーマン面をコンパクト化して背景電荷 $\mathcal{O}_{\mathrm{bg}} =: e^{-iN\sqrt{m}\phi(z_\infty)}:$ を無限遠点に置いたような Laughlin 波動関数 (5.5) を利用します。

（準備中）

この章のまとめ

- 境界での電子のスキップ運動に由来するエッジモードは、ゲージ自由度が境界条件により物理的な自由度へ転化したカイラルな場として記述される。
- 可換 FQH のエッジ励起は、ボゾン化法によりカイラルなスカラー場が従う Floreanini-Jackiw 作用に帰着する。

この章についてくわしく

- （準備中）

7 TQFT$_3$/CFT$_2$ 対応

さて、ここまでの内容を振り返ってみると、3 章では FQH の Chern-Simons 理論（TQFT）を用いた記述、そして 5 章と 6 章では、主に波動関数を用いた定式化を中心に、CFT の方法がどのように利用できるのかを見てきたのでした。これで材料がそろい、本ノートの目的だった FQH における TQFT/CFT 対応を議論できるところまで準備が終わりました。

本章では、これらの定式化がどのように繋がり、一方からもう一方を導ける、というような等価な関係になっているかを見ていきます。ただし、あくまでも FQH への応用を念頭に置いているため、一般の TQFT の議論に立ち入ることはせず、もっぱら Chern-Simons 理論と Wess-Zumino-Witten CFT の関係について見ていきます。

まず、簡単な場合として Laughlin 状態の理論であった $\mathrm{U}(1)_m$ Chern-Simons 理論と、$R=\sqrt{m}$ のコンパクトボゾンの理論について具体的にこの対応関係を見ます。次に、その一般化としてゲージ群を $G=\mathrm{SU}(N)_k$ とするような場合を紹介します。

はじめに、5 章で議論したバルク CFT との関係を見ます。時空を表す多様体を $\mathcal{M}=\Sigma\times\mathbb{R}_{\mathrm{time}}$ とし、Σ はコンパクトで境界をもたない 2 次元閉曲面とします。

この章のキーワード

- （平坦接続の）モジュライ空間
- ホロノミー
- CS/WZW 対応

7.1 ホロノミーとモジュライ空間

さて、付録 A で紹介したように、Chern-Simons 理論はバルクでダイナミカルな自由度をもたず、物理的に実現する配位は平坦接続 $\mathrm{d}\alpha=0$ に限られるのでした。しかし、Σ 上に非可縮なループがあるときには、局所的には平坦でも大域的には非自明なホロノミーをもつことができ、これが Chern-Simons 理論が Σ 上でもつ唯一の自由度であるといえます。

たとえば $\Sigma\simeq T^2$（2 次元トーラス）の場合には、閉曲面 Σ が種数 $g=1$ を持ち $\mathcal{M}$ に非可縮なループの方向が 2 つあるので、それぞれのループに沿ってゲージ場はホロノミーを持つことができます。たとえば Γ_1,Γ_2 をそれぞれ T^2 の異なる方向（longitude 方向と meridian 方向；参照：付録 A）に 1 回だけ巻きつくループとすると、それぞれのループに沿って

$$e^{i\theta_1}\equiv e^{i\int_{\Gamma_1}\alpha},\quad e^{i\theta_2}\equiv e^{i\int_{\Gamma_2}\alpha}\quad\in\mathrm{U}(1) \tag{7.1}$$

のようなホロノミーが存在できます。このホロノミーはゲージ不変量なので、結局、T^2 上の平坦接続の自由度の空間は

$$(\theta_1,\theta_2)\in[0,2\pi)\times[0,2\pi)\simeq S^1\times S^1\simeq T^2 \tag{7.2}$$

であるということができます。

一方、$\Sigma\simeq S^2$ の場合には、Σ 上のすべてのループが可縮なので、ゲージ場はホロノミーを持つことができません。したがって、S^2 上の平坦接続の自由度の空間は $\{0\}$ という 1 点集合となります。

一般にこのような平坦ゲージ場の配位全体の集合は、Σ の基本群 $\pi_1(\Sigma)$ に対して $\mathrm{U}(1)$ の元を割り当てる準同型写像の集合と同一視することができ、

$$\mathcal{M}_0\simeq\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma),\mathrm{U}(1)) \tag{7.3}$$

と書けます。ここに、$\mathrm{Hom}(G,H)$ は G から H への準同型写像全体の集合です。

一方、a の配位にはゲージ変換 $a\mapsto a+\mathrm{d}\lambda$ だけの冗長性がありました。したがって、物理的な配位は $\mathcal{M}_0$ のうち、ゲージ変換で移り変わるものを同一視した空間

$$\mathcal{M}_{\mathrm{moduli}}\simeq\mathcal{M}_0/\{\,\text{ゲージ変換}\,\}\simeq\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma),G)/G \tag{7.4}$$

であると言えます。ただし、$G=\mathrm{U}(1)$ の場合には $\mathrm{d}a$ のゲージ変換は自明（$\mathrm{d}a\mapsto\mathrm{d}a$）なので、単に

$$\mathcal{M}^{\mathrm{U}(1)}_{\mathrm{moduli}}(\Sigma)\simeq\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma),\mathrm{U}(1)) \tag{7.5}$$

となります。$\Sigma\simeq T^2$ の場合には $\pi_1(T^2)\simeq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ なので、たしかに

$$\mathcal{M}^{\mathrm{U}(1)}_{\mathrm{moduli}}(T^2)\simeq\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathrm{U}(1))\times\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathrm{U}(1))\simeq S^1\times S^1\simeq T^2 \tag{7.6}$$

となっています。また、$\Sigma\simeq S^2$ の場合の $\mathcal{M}^{\mathrm{U}(1)}_{\mathrm{moduli}}(S^2)\simeq\{0\}$ も同様に確かめられます。このように Σ 上のホロノミーの自由度がなす空間を、平坦接続の**モジュライ空間（*moduli space*）**と呼びます。

7.1.1 Chern-Simons 理論の正準量子化

以下で見るように、モジュライ空間 $\mathcal{M}^{\mathrm{U}(1)}_{\mathrm{moduli}}(\Sigma)$ をコンパクトな相空間と見て正準量子化の手続きを実行することができます。そのために、まず時間一定面 Σ でのゲージ場を正準変数と見て正準交換関係を課し、その後で物理的な状態に対して平坦接続の条件を課します。

これを具体的に見るために、$\nu=1/m$ の Laughlin 状態を記述する $\mathrm{U}(1)_m$Chern-Simons 理論 (3.24) で、特に座標をあらわに表示した表式

$$\mathcal{L}=-\frac{m}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\alpha_\mu\partial_\nu\alpha_\lambda=\frac{m}{4\pi}\left(\epsilon^{ij}\alpha_i\dot{\alpha}_j-\alpha_0f_{12}\right) \tag{7.7}$$

を用います。この表式から分かるように、α_0 はダイナミカル自由度ではなく、Σ 上でのゲージ場を平坦接続 $f_{12}=0$ に固定する未定乗数として働きます。ここでは、$\alpha_0=0$ にゲージ固定し、あとで物理的な状態に対する条件として $f_{12}\,|\mathrm{Phys}\rangle=0$ と課すことにします。

これにより、Σ 上での自由度 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ のしたがうラグランジアン

$$\mathcal{L}=\frac{m}{4\pi}\epsilon^{ij}\alpha_i\dot{\alpha}_j \tag{7.8}$$

が得られ、したがって正準変数 α_i に対応する正準運動量は $\Pi_i=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\alpha}_i=(m/2\pi)\epsilon^{ki}\alpha_k$ と求められます。これらの間に同時刻での正準交換関係を課すと

$$[\alpha_i(\boldsymbol{x}),\Pi_j(\boldsymbol{y})]=i\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\qquad\text{すなわち、}\qquad[\alpha_i(\boldsymbol{x}),\alpha_j(\boldsymbol{y})]=\frac{2\pi i}{m}\epsilon_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{7.9}$$

が得られ、複素座標（$z=x+iy$）を取ると、

$$[\alpha_z(z,\overline{z}),\alpha_{\bar{z}}(w,\overline{w})]=\frac{4\pi}{m}\delta(z-w) \tag{7.10}$$

という表式に簡約されます。この表式では、α_z と $\alpha_{\bar{z}}$ が互いに正準共役な関係になっていることが分かります。

さて、一粒子量子力学での正準量子化でなじみ深いドグマとして、正準運動量を微分演算子に置き換えることで、正準交換関係の情報を波動関数に組み込むことができたのでした。そこで、今回も、$\alpha_{\bar{z}}$ が q に、α_z が p にそれぞれ対応する力学変数と見て、$\alpha_{\bar{z}}$ の波動汎関数のなす空間としてヒルベルト空間を定義することを考えます。このとき、$\alpha_{\bar{z}}$ と非可換な α_z は汎関数微分の演算子に置き換わり、

$$\alpha_z\longmapsto\frac{4\pi}{k}\frac{\delta}{\delta\alpha_{\bar{z}}} \tag{7.11}$$

と書くことができます。

そして、量子力学で $H(q,p)=E$ を相空間の中の運動の拘束条件とみなして、q の波動関数 $\psi(q)$ に対する Schrödinger 方程式を導いたのと同様に、平坦接続の条件 $f_{z\bar{z}}=0$ を物理的状態への拘束条件（の、$\alpha_{\bar{z}}$ の基底での表示）と見なして $\alpha_{\bar{z}}$ の波動汎関数 $\Psi[\alpha_{\bar{z}}]$ に対する汎関数微分方程式

$$\langle\alpha_{\bar{z}}|\, f_{z\bar{z}}\,|\Psi_{\mathrm{CS}}\rangle=0\longmapsto\left(\bar{\partial}\frac{\delta}{\delta\alpha_{\bar{z}}}-\frac{m}{4\pi}\partial\alpha_{\bar{z}}\right)\Psi_{\mathrm{CS}}[\alpha_{\bar{z}}]=0 \tag{7.12}$$

が得られます。この方程式を満たすような状態は、平坦接続で大域的には非自明なホロノミーを持つような配位を表しており、これをもって Chern-Simons 理論の正準量子化が完了しました。

7.1.2　境界条件つき分配関数としての波動関数

一方、別の見方をすると、これは時間一定面 Σ での $\alpha_{\bar{z}}$ の境界条件を固定した分配関数（遷移振幅）と見ることもできます。通常の量子力学では、波動関数は

$$\psi(t)=\langle x|\psi(t)\rangle=\langle x|\exp\left[-i\int_{-\infty}^{t}H\right]|\psi(-\infty)\rangle=\int_{\text{境界条件}\left|_{t}=|x\rangle\right.}\mathcal{D}\psi e^{iS[\psi]} \tag{7.13}$$

と書けて、時刻 t での状態を x の固有状態に固定するという境界条件の下で経路積分を取った分配関数として書けていたのでした。今の場合にも、時間一定面 Σ での状態を $\alpha_{\bar{z}}$ の固有状態に固定するという境界条件のもとでの分配関数

$$\Psi_{\mathrm{CS}}[\alpha_{\bar{z}}]=\int_{\text{境界条件}\left|_{\Sigma}=\alpha_{\bar{z}}\right.}\mathcal{D}\alpha\,\exp\left[iS_{\mathrm{CS}}[\alpha_z,\alpha_{\bar{z}}]\right] \tag{7.14}$$

と見なせます。

7.2　複素ボゾン CFT の共形ブロック

5.1 節では、Laughlin 状態の波動関数が複素ボゾンの CFT の共形ブロックとして表されることを見ました。このことから、$\mathrm{U}(1)_m$Chern-Simons とコンパクト複素ボゾン（$R=\sqrt{m}$）の CFT との間に関係があることが示唆されたわけですが、以下ではこの関係をもっと直接的に、前節で構成した波動関数のヒルベルト空間と共形ブロックの空間が一致していることを見ていきます。

はじめに、外場と結合したコンパクト複素ボゾン（$\phi\sim\phi+2\pi\sqrt{m}$）の CFT

$$\mathcal{L}[\alpha_{\bar{z}}]=\frac{1}{2\pi}\bar{\partial}\phi\partial\phi-\sqrt{m}\alpha_{\bar{z}}J_z \tag{7.15}$$

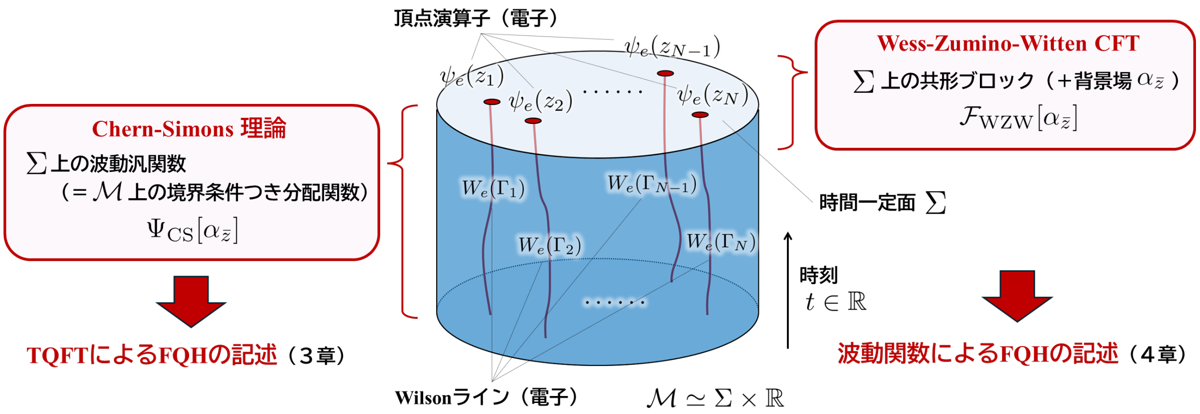
を考えます。ここで、J_z は複素ボゾンがもつカレント代数の生成子 $J_z=\partial\phi/2\pi$ であり、これが反正則な背景場 $\alpha_{\bar{z}}$ と第 2 項を通じて結合しています。正則な演算子と反正則な演算子で結合していることは、もとの座標での結合が $\mathcal{O}_iJ_i$（$\mathcal{O}_i$ は何らかのベクトル演算子）のようだったことを思い出すと、複素座標での結合の仕方は $\mathcal{O}_zJ_{\bar{z}}+\mathcal{O}_{\bar{z}}J_z$ となることから分かります。今は正則なカレントとの結合に興味があるので、$\mathcal{O}_{\bar{z}}J_z$ の部分だけを取りました。

さて、ϕ の運動方程式は (7.15) から

$$-\frac{1}{\pi}\bar{\partial}\partial\phi+\frac{\sqrt{m}}{2\pi}\partial\alpha_{\bar{z}}=0\quad\text{すなわち、}\quad\bar{\partial}\left(\sqrt{m}\frac{\partial\phi}{2\pi}\right)-\frac{m}{4\pi}\partial\alpha_{\bar{z}}=0 \tag{7.16}$$

と求めることができますが、量子論としては真空期待値のレベルで成り立つ等式だと理解するべきです。そのため、リーマン面上での CFT の分配関数

$$Z_{\mathrm{CFT}}[\alpha_{\bar{z}}]=\left\langle\exp\left[\sqrt{m}\int\mathrm{d}^2z\,\alpha_{\bar{z}}J_z\right]\right\rangle_{\mathrm{CFT}} \tag{7.17}$$



をもとめ、摂動的場の理論で通常行うように、外場で分配関数の汎関数微分を取るとカレントの期待値を計算する方法を取ることにします。分配関数を外場で微分すると、

$$\frac{\delta}{\delta\alpha_{\bar{z}}} Z_{\mathrm{CFT}}[\alpha_{\bar{z}}] = \sqrt{m}\left\langle J_z \mathrm{exp}\left[\sqrt{m}\int \mathrm{d}^2 z \alpha_{\bar{z}} J_z\right]\right\rangle_{\mathrm{CFT}} = \frac{\sqrt{m}}{2\pi}\left\langle \partial\phi\ \mathrm{exp}\left[\sqrt{m}\int \mathrm{d}^2 z \alpha_{\bar{z}} J_z\right]\right\rangle_{\mathrm{CFT}} \tag{7.18}$$

と、J_z の任意の相関関数が計算できます。

したがって、(7.16) は次のように書き換えることができます。

$$\left(\bar{\partial}\frac{\delta}{\delta\alpha_{\bar{z}}} - \frac{m}{4\pi}\partial\alpha_{\bar{z}}\right) Z_{\mathrm{CFT}}[\alpha_{\bar{z}}] = 0 \tag{7.19}$$

この表式と (7.12) を見比べると、まったく同一の汎関数微分方程式にしたがっていることが分かります。そこで、本節の最初に CFT に結合させた外場 $\alpha_{\bar{z}}$ を、前節までで扱った Chern-Simons 理論の時間一定面でのダイナミカルなゲージ場と同定すると、

$$\Psi_{\mathrm{CS}}[\alpha_{\bar{z}}] = Z_{\mathrm{CFT}}[\alpha_{\bar{z}}] \tag{7.20}$$

という関係式を得ることができます。これは、3 次元 Chern-Simons 理論のヒルベルト空間と 2 次元複素ボゾン CFT の共形ブロックの空間が等価であるという定量的な関係にほかならず、「FQH が TQFT と CFT いずれを用いても有効に記述できるのはなぜか？」という問いに対する鮮やかな回答でもあります。

また、次の節で見るように、この関係は非可換 Chern-Simons 理論に対しても一般化することができ、そのときには対応する 2 次元 CFT は Wess-Zumino-Witten 模型となって、同様の関係式

$$\Psi_{\mathrm{CS}}[\alpha_{\bar{z}}]_\alpha = Z_{\mathrm{WZW}}[\alpha_{\bar{z}}]_\alpha \tag{7.21}$$

を得ることができます。「Chern-Simons 理論のヒルベルト空間と Wess-Zumino-Witten 模型の共形ブロックの空間が等価である」というこの関係を、**Chern-Simons/Wess-Zumino-Witten（CS/WZW）対応（*Chern-SImons/Wess-Zumino-Witten correspondence*）**と呼び、**TQFT/CFT 対応（*TQFT/CFT correspondence*）**の一つです。

（準備中）

7.2.1　Wilson ライン・頂点演算子の挿入

Wilson ラインがあるときには、そのまわりを回るループに沿って非自明なゲージ場のホロノミーが生じます。具体的には、$\mathrm{U}(1)_m$ Chern-Simons 理論での Wilson ライン $W_k = e^{ik\int\alpha}$ などを考えると、その周りには

$$e^{i\int\alpha} W_k = e^{2\pi ik/m} W_k \tag{7.22}$$

だけのホロノミーが誘起されるのでした。すなわち、局所的には平坦 $\mathrm{d}\alpha = 0$ であるにもかかわらず、大域的には非自明な自由度が残ります。これは、言い換えれば、Wilson ライン $W_k(\Gamma)$ があるときには

$$\mathrm{d}\alpha = 0 \longmapsto \mathrm{d}\alpha = \frac{2\pi k}{m}\delta^2(\Gamma) \tag{7.23}$$

という Gauss 則が要請され、場の強さが局所的に「ソース項」を持つということにほかなりません。ここで、$\delta^2(\Gamma)$ は付録 A で導入したデルタ関数形式で、閉曲面が Γ を横切るとき、またそのときに限り、積分値 1 を返すような 2-form です。

さて、付録 A で見たように、Chern-Simons 理論を FQH の有効理論と見たとき、Wilson ラインはエニオンの世界線であるとの解釈ができるのでした。したがって、実験室で試料にエニオンが励起しているとき、これはある時間一定面 Σ を Wilson ラインが過去から未来に向かって横切っているとみなすことができます。

そこで、$\alpha_0 = 0$ とゲージ固定し、ゲージ場をこの時間一定面 Σ での空間成分で見ると、(7.23) の「ソース項」つき Gauss 則は

$$f_{z\bar{z}}\left|\Psi_{\mathrm{CS}}\right\rangle = \frac{2\pi i k}{m}\delta^2(z - z_i)\left|\Psi_{\mathrm{CS}}\right\rangle \tag{7.24}$$

とできます。ここで、Wilson ラインが Σ を貫く点の複素座標を z_i としました。

より一般に、N 本の Wilson ライン $\{W_{k_i}(\Gamma_i)\}_{i=1,2,\cdots,N}$ が時間一定面 Σ を $\{z_i\}$ においてつらぬくとし、Guass 則を

$$f_{z\bar{z}}\left|\Psi_{\mathrm{CS}}\right\rangle = \left[\sum_{i=1}^{N}\frac{2\pi i k_i}{m}\delta^2(z - z_i) - \frac{2\pi i}{m}\left(\sum_i k_i\right)\delta^2(z - z_\infty)\right]\left|\Psi_{\mathrm{CS}}\right\rangle \tag{7.25}$$

と与えたとき、Σ での共形ブロックはどのようになるかを見てみます。ただし、電荷の保存条件（コンパクトな閉曲面でのホロノミーの総和はゼロになるべきこと）から、リーマン面を一点コンパクト化して無限遠点に全電荷を打ち消す背景電荷を挿入しました。

このとき、CFT の共形ブロックは、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathrm{CFT}}[\alpha_{\bar{z}}] &= \left\langle \exp\left[\sqrt{m}\int \mathrm{d}^2 z\,\alpha_{\bar{z}} J_z\right]\right\rangle_{\mathrm{CFT}} \\
&= \left\langle \exp\left[-\frac{\sqrt{m}}{2\pi}\int \mathrm{d}^2 z\,\partial\alpha_{\bar{z}}\phi(z,\bar{z})\right]\right\rangle_{\mathrm{CFT}} \\
&= \left\langle \exp\left[i\sqrt{m}\int \mathrm{d}^2 z\left\{\sum_{i=1}^{N}\frac{k_i}{m}\delta^2(z - z_i) - \frac{1}{m}\left(\sum_i k_i\right)\delta^2(z - z_\infty)\right\}\phi(z)\right]\right\rangle_{\mathrm{CFT}} \\
&= \left\langle \left(\prod_{i=1}^{N} :e^{ik_i\phi(z_i)/\sqrt{m}}:\right) :e^{-i(\sum_i k_i)\phi(z_\infty)/\sqrt{m}}:\right\rangle_{\mathrm{CFT}}
\end{aligned} \tag{7.26}$$

ここで、3 番目の等号では $\phi(z,\bar{z}) = \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z})$ および $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = -\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z$ などを用いました。この表式から、Σ を横切る Wilson ラインと、Σ 上に誘起される頂点演算子の間に

$$\text{Wilson ライン}\quad e^{ik\int a} \quad\longleftrightarrow\quad \text{頂点演算子}\quad :e^{ik\phi(z)/\sqrt{m}}: \tag{7.27}$$

という対応関係があることが見て取れます。

ここで、系に電子が N 個あるとして、電子の世界線と時間一定面での表示の対応を見てみます。$\mathrm{U}(1)_m$Chern-Simons 理論で電子の世界線に対応した Wilson ラインは $e^{im\int a}$ だったので、N 個の電子が座標 $\{z_i\}$ に挿入されているとすると、$:e^{i\sqrt{m}\phi(z)}:$ という頂点演算子が N 個挿入されていることになります。したがって、このときの CFT の共形ブロックは

$$\mathcal{F}_{\mathrm{CFT}}(\{z_i\}) = \left\langle \left(\prod_{i=1}^{N} :e^{i\sqrt{m}\phi(z_i)}:\right)\mathcal{O}_{\mathrm{bg}}\right\rangle_{\mathrm{CFT}} \tag{7.28}$$

のようになりますが、これは (5.1) で見た Laughlin 状態の波動関数にほかなりません。4 では、半ば発見法的に見出された Laughlin 波動関数の CFT 相関関数表示でしたが、TQFT との関係から「導出」することができたわけです。

7.3 非可換 Chern-Simons 理論と WZW CFT

（準備中）

7.4 Chern-Simons 理論からのエッジ理論

6.1 同じ結論を今度はバルクの Chern-Simons 理論 (3.24) から導いてみましょう。先ほどと同様に、$y < 0$ が FQH で満たされているとし、$y = 0$ を伝播するエッジモードを考えます。このエッジモードは、境界に沿った方向のゲージ変換関数として現れることを以下で見ます。

まず、EM 外場との結合項は一旦忘れておくとして、一般に境界をもった多様体 $\mathcal{M}$ の上で (3.24) の変分を考えると、

$$\delta \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_0 = -\frac{m}{2\pi} \int_{\mathcal{M}} \delta\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha + \frac{m}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} \alpha \wedge \delta\alpha \tag{7.29}$$

のように境界項が消えずに残ります（$\mathrm{d}(\alpha \wedge \delta\alpha) = \mathrm{d}\alpha \wedge \delta\alpha - \alpha \wedge \delta\mathrm{d}\alpha$ などに注意）。これがゼロになるためには、バルクの運動方程式 $\mathrm{d}\alpha = 0$ に加えて、境界条件 $\alpha \wedge \delta\alpha|_{y=0} = \alpha_0\delta\alpha_x - \alpha_x\delta\alpha_0|_{y=0} = 0$ を課すことが必要です。これはたとえば、$\alpha_0|_{y=0} = 0$ か $\alpha_x|_{y=0} = 0$ のいずれかを課すことで達成できますが、その線形結合

$$\alpha_0 - v\alpha_x \Big|_{y=0} = 0 \tag{7.30}$$

を課すことにしましょう。ここで v はパラメータですが、以下で見るように、これはエッジモードの音速を与えます。エッジモードの音速は相互作用の詳細に依存する「非普遍的」なパラメータなので、バルクの情報だけからは決定できないことは上でも述べました。このインプット・パラメータを、今は境界条件の形で取り込むトリックを使ったわけです。

ここで、上の境界条件をバルクに延長して $\alpha_0 - v\alpha_x = 0$ をゲージ固定条件として課すことにします。ゲージ固定条件の取り方は任意なので、境界との関係が分かりやすくなるようなものを取ることができるためです。さらに、$t' = t, x' = x + vt, y' = y$ という新たな座標系を取ると、ゲージ場は

$$\alpha'_{0'} = \alpha_0 - v\alpha_x, \quad \alpha'_{i'} = \alpha_i \tag{7.31}$$

となり、今課したゲージ固定条件は単に $\alpha'_{0'} = 0$ となります。

さて、このゲージ固定条件を課した結果として、$\alpha'_{0'}$ についての運動方程式 $f_{i'j'} = 0$（Gauss law）が演算子のレベルで見えなくなるので、そこで代わりにこれを物理的条件に対する拘束条件 $f_{i'j'}\,|\mathrm{Phys}\rangle = 0$ として課します。これを満たす「空間」方向に平坦なゲージ場は、$\alpha'_{i'} = \partial_{i'}\varphi$ という形をとります（「pure gauge」）。「空間」とカッコ書きしているのは、今の空間座標 $\{x', y'\}$ は時間方向と空間方向の線形結合になっており、物理的な空間と一致しないためです。φ は「空間」方向のゲージ変換関数で、ゲージ固定をしたあとのこの理論に残った唯一の自由度です。Chern-Simons 理論は TQFT なので、バルクには力学的な自由度が存在しません。一方、境界においては上で見たようにゲージ不変性が破れるため、本来はゲージ自由度にすぎなかった φ が、エッジに局在した物理的な自由度として現れたと捉えることができます。

さて、座標 $\{t', x', y'\}$ で (3.24) を表し、ゲージ固定条件 $\alpha'_{0'} = 0$ および $\alpha'_{i'} = \partial_{i'}\varphi$ を代入すると、

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{m}{4\pi}\epsilon^{\mu'\nu'\lambda'}\alpha'_{\mu'}\partial_{\nu'}\alpha'_{\lambda'} = \frac{m}{4\pi}\epsilon^{i'j'}\alpha'_{i'}\partial_0\alpha'_{j'} = \frac{m}{4\pi}(\partial_{x'}\varphi\partial_0\partial_{y'}\varphi - \partial_{y'}\varphi\partial_0\partial_{x'}\varphi) \tag{7.32}$$

というラグランジアンが得られます。$y=0$ に境界をもつ多様体 $\mathcal{M}$ の上では、

$$\begin{aligned} S=\int \mathcal{L}_0 &= \frac{m}{4\pi}\int \mathrm{d}t'\mathrm{d}x'\mathrm{d}y\partial_y(\partial_{x'}\varphi\partial_{0'}\varphi) \\ &= \frac{m}{4\pi}\int \mathrm{d}t'\mathrm{d}x'\partial_{x'}\varphi\partial_{0'}\varphi \end{aligned} \tag{7.33}$$

とできて、もとの座標で表すと、結局エッジにおけるボゾン場の理論

$$\mathcal{L}_{\mathrm{edge}}=\frac{m}{4\pi}\left[(\partial_x\varphi)(\partial_0\varphi)-v(\partial_x\varphi)^2\right] \tag{7.34}$$

がしたがいます。これは、前節でエッジモードの物理的な考察から得られた理論と一致しています。前節では、エッジを伝播する電荷のボゾン化として φ を得ましたが、ここでは空間方向のゲージ変換関数の自由度として φ を得ました。出発点となった物理的な描像は異なりますが、いずれも Laughlin 状態のエッジ励起を記述しており、**Floreanini-Jackiw 作用**（***Floreanini-Jackiw action***）と呼ばれることがあります。

この章のまとめ

- Chern-Simons 理論のヒルベルト空間は CFT の共形ブロックの空間と等価であり、波動汎関数はカレントと結合した分配関数と同一視される。
- バルクを貫く Wilson ラインは CFT の頂点演算子に対応し、その相関関数は Laughlin 状態などの多体波動関数を構成する。
- 境界におけるゲージ不変性の要請が本来のゲージ自由度を物理的なエッジモードへと転化させ、エッジ上のカイラルなボゾン場の理論を与える。

この章についてくわしく

- [Elitzur et al., 1989]
- [Witten, 1989]
- （準備中）

8　その他の話題

本文中で触れられなかったけれども、個人的に面白いと思ったFQH・エニオン関連の話題をアラカルト的に集めました。時間がなくて書けなかったものは有名な文献をまとめました。随時更新していく予定です。

8.1　エッジモードに現れる W_∞ 代数

（準備中）

8.2　エニオン超伝導

（準備中）

8.3　階層性の代数的方法

- [Zhang et al., 2025b]：K 行列や具体的なTQFTを使わずに階層FQHを構成するという最近の話題。Levin-Halperin階層性 [Levin and Halperin, 2009] の一般化。
- PH-Pfaffianの階層性が分かるので、$\nu = 1/2$ で見えているFQHはPfaffianなのか、anti-Pfaffianなのか、PH-Pfaffianなのか論争に決着がつくかもしれないという嬉しさがある

9　おわりに

分数量子ホール系については、現代的かつ体系的な日本語の教科書がまだあまりないので、時間のあるときにさらに書き加えていって、最終的に満足のいくノートにしたいなという願望があります。その点、締切の外圧がないと何もできないので、アドカレはとても良い文化だなあと思っています。最後に、私の好きな FQH のテキスト・レビュー論文をいくつか紹介して終わりにしたいと思います。

[Tong] は、言わずと知れた David Tong による量子ホール系のレクチャーノート（もはや教科書？）で、整数・分数量子ホール系の現象論から Chern-Simons 理論の方法までが十分すぎるほど網羅的・体系的にまとまっています。このノートで扱った CFT 周辺の話題については最後の章で少し言及がある程度ですが、入門用のテキストとしては代表的なものだと思います。

[Zee, 1995] は、後述の Wen のレビューとともに、長らく標準的なテキストであったレビュー論文です。物性のことを本当に何も知らない状態から、FQH の勉強をするのに指導教員に勧められて私が最初に読んだレビューでもあります。複合フェルミオン（ボゾン）描像を中心に、物質場＋ Chern-Simons 項の場の理論を主に扱っており、K 行列の導入が分かりやすいです。「３次元では Chern-Simons 項と Chern-Simons 項が双対で、マクスウェル項とマイスナー項が双対で——」といった場の理論の双対性の話をベースに議論が進んでいくので、３次元ゲージ理論とあらかじめ仲良くなっておくと読みやすいかもしれません。この点に関しては、同じ著者による場の理論の本 [Zee, 2010] があり、VI 章で双対性と FQH のもっと入門的な話をしてくれています。普通に場の理論の本としても良い本で、邦訳もあります。前半の邦訳（『ジー先生の場の量子論・基礎編』[Zee, 2020]）が出てから後半の邦訳が（個人的に）待望されていたのですが、最近後半の邦訳（『ジー先生の場の量子論・応用編』[Zee, 2025]）も出て大喜びしました。ちなみに FQH の話は邦訳版だと『応用編』の方に収録されています。経路積分の導入をベッドのマットレスの話から始めたり、やさしい（やさしくない）練習問題を「赤ちゃん問題」と称したりするなど、独特の「ジー先生節」に耐えられさえすれば、とても良い本だと思います。

[Wen, 1995] もまた、FQH の非常に有名なレビューです。タイトルからも分かるように、バルクの議論から徐々にエッジモードの話に向かっていく構成になっています。こちらは前述の Zee のレビューとは異なり、IR での有効理論として直接 Chern-Simons から出発する形式です。エッジモードを議論するときには物質場はあらかじめ積分しておいた方が都合がよく、実際、エッジ CFT についてはかなりの紙数を割いて入門的な解説をしてくれています。複合フェルミオンは出てこないので、粒子描像を頭に置きながら読むと混乱するかもしれませんが、複合フェルミオンを扱った Zee のレビューと相補的に読めば教育的だと思います。噛めば噛むほど味が出る系のレビューです。

[Hansson et al., 2017] は、FQH の階層性への CFT の応用を網羅的に議論した（おそらく最初の）現代的なレビューです。このノートも多くの部分を参考にしており、歴史を概観する意味でもとても勉強になるかなと思います。CFT 自体の教科書については、すでに多くの方が紹介されていると思うのでここでは触れません。

付録 A　速習：3 次元 Chern-Simons 理論

この章では、3 次元 Chern-Simons 理論の基本事項を、FQH に関する本文中の議論で必要十分な範囲で（また、必要十分な厳密さで）ざっとおさらいします。Chern-Simons 理論は作用が計量によらない（Schwarz 型の）TQFT の代表例であり、エニオンの世界線（Wilson ライン）を荷電オブジェクトとする 1-form の大域的対称性をもちます。以下では、はじめに Laughlin 状態の有効理論である $\mathrm{U}(1)_m$Chern-Simons 理論について、次に非可換 TQFT の例として $\mathrm{SU}(N)_k$Chern-Simons 理論についてそれぞれ紹介します。

また、一般化対称性の言葉遣いについては、[McGreevy, 2023; Brennan and Hong, 2023; Bhardwaj et al., 2023] などを参照してください。

A.1　$\mathrm{U}(1)_m$Chern-Simons 理論

はじめに、3 次元多様体 $\mathcal{M}$ 上の $\mathrm{U}(1)_m$Chern-Simons 理論を以下の作用で定義します。

$$S_{\mathrm{U}(1)\mathrm{CS}} = \frac{m}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} a \wedge \mathrm{d}a \qquad \text{(付録 A.1)}$$

ここに、a は U(1) ゲージ場で、m は Chern-Simons レベルと呼ばれる整数です。後述するように、m は本文中では Chern-Simons レベルに負号をつけて定義しました (4.13) が、ここでは負号を m に取り込んで上の定義を取ります。

A.1.1　ゲージ対称性・運動方程式

作用を a で変分すると、運動方程式 $\mathrm{d}a = 0$ が得られます。すなわち、(付録 A.1) にはバルクのダイナミカルな自由度が存在せず、局所的にはいつでもゲージ変換で平坦なゲージ場の配位に移ることができます。また、a が U(1) ゲージ場であるという条件

$$\int \frac{\mathrm{d}a}{2\pi} \in \mathbb{Z} \qquad \text{(付録 A.2)}$$

から、作用 $e^{iS} = \exp\left[2\pi i \int (ma/2\pi) \wedge (\mathrm{d}a/2\pi)\right]$ が停留するには

$$m\int \frac{a}{2\pi} \in \mathbb{Z} \qquad \text{(付録 A.3)}$$

を満たさなくてはならないことが分かります。

A.1.2　1-form 大域的対称性

この理論には、保存則 $\mathrm{d}a = 0$ に付随する 1-form の大域的 $\mathbb{Z}_m$ 対称性

$$a \longmapsto a + \epsilon \quad \left(\mathrm{d}\epsilon = 0,\ m\int \frac{\epsilon}{2\pi} \in \mathbb{Z}\right) \qquad \text{(付録 A.4)}$$

があります。

このとき荷電オブジェクトと対称性のトポロジカル演算子は同一で、**Wilson ライン（*Wilson line*）**と呼ばれる量です。以下では、本文中の議論に沿ってこれを紹介します。

3 で見たように、基底状態からのエニオン励起は、(3.25) でも見たようにカレントとの結合項

$$\Delta\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = qa \wedge j \qquad \text{(付録 A.5)}$$

で表されるのでした。ここで、励起したエニオンのたどる世界線を Γ とすると、カレントは

$$j = \delta^2(\Gamma) \qquad \text{(付録 A.6)}$$

のように書けます。ここで、$\delta^2(\Gamma)$ はデルタ関数形式と呼ばれる 2-form で、ω を任意の 1-form としたとき

$$\int \omega \wedge \delta^2(\Gamma) = \begin{cases} \int_\Gamma \omega & (S \text{ と } \Gamma \text{ が交点をもつ}) \\ 0 & (S \text{ と } \Gamma \text{ が交点をもたない}) \end{cases} \tag{付録 A.7}$$

を与えるものと定義します。このように具体的な表式を取ると、カレントとゲージ場の結合項の積分は、

$$\int \Delta\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = q\int a \wedge \delta^2(\Gamma) = q\int_\Gamma a \tag{付録 A.8}$$

のようになります[*20]。したがって、このときの分配関数は

$$Z = \int \mathcal{D}\alpha e^{i\int(\mathcal{L}_{\mathrm{U(1)CS}}+\mathcal{L}_{\mathrm{int}})} = \int \mathcal{D}a e^{iq\int_\Gamma a} e^{iS_0} \tag{付録 A.9}$$

と書くことができます。このとき、$e^{iq\int_\Gamma a}$ を Γ 上で定義された演算子

$$W_q(\Gamma) \equiv e^{iq\int_\Gamma a} \tag{付録 A.10}$$

と見ることができ、これを **Wilson ライン（*Wilson line*）** と呼びます。

Wilson ラインは Γ 上で定義されていますが、この Γ は他の Wilson ラインをまたがない限り自由に変形することができ、トポロジカルな演算子であると言われます。これは、$\Gamma \mapsto \Gamma'$ と連続変形し、$\delta S = \Gamma \cup \overline{\Gamma'}$ となるような S を用いて

$$W_q(\Gamma) \mapsto W_q(\Gamma') = W_q(\Gamma)\exp\left[iq\int_{\Gamma\cup\overline{\Gamma'}} a\right] = W(\Gamma)\exp\left[iq\int_S \mathrm{d}a\right] \tag{付録 A.11}$$

とすれば、最右辺は運動方程式 $\mathrm{d}\alpha = 0$ から $W(\Gamma)$ に等しくなるためです。

また、Wilson ラインの真空期待値は、分配関数から機械的に計算することができます。練習問題として、

（準備中）

A.2　非可換 Chern-Simons 理論

（準備中）

A.3　Spin$_C$ 接続の使い方と電荷・統計対応

スピン・統計定理という力強い道具がある相対論的な系とは対照的に、物性理論で扱うような非相対論的な系では、アプリオリに「スピン半整数＝フェルミオン、スピン整数＝ボゾン」という関係はありません。しかし、実際の物理系に登場する粒子は必ずこの関係を満たしているのであり、とくに強相関電子系のような電子を基本的な自由度とする系では、「奇数電荷＝フェルミオン、偶数電荷＝ボゾン」という関係が by definition で存在します。この関係を**電荷・統計対応（*charge-statistics correspondence*）**と呼び、非相対論的な理論においてスピン・統計定理に代わる条件として手で課すことで、統計性の情報を忘れないための備忘録とすることがあります。

この電荷・統計対応は、EM外場をSpin$_C$ 接続に取ることで自動的に場の理論に組み込むことができます。以下では、まず Spin$_C$ 接続を（物理のレベルの厳密さで）導入し、これを物性理論でどう扱うのかを紹介します。

[*20] 微分形式を使わない記法だと、結合項 $\alpha_\mu j^\mu$ で $j_0(t,\boldsymbol{x}) = \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_a}(t)), j_i(t,\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{a}}(t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_a}(t))$

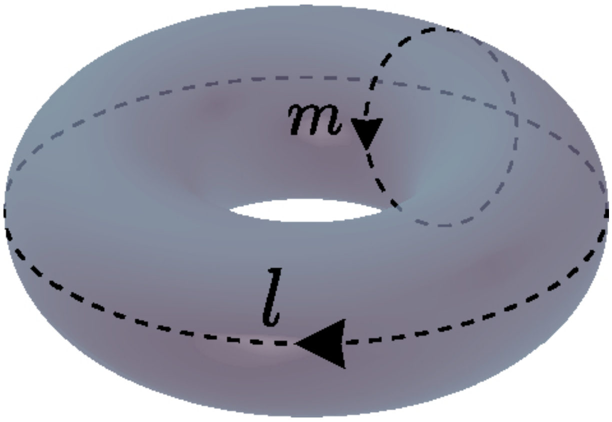


図 8　2 次元トーラスの longitudinal 方向（l）と、meridional 方向（m）

A.3.1　スピン多様体

ここで、Chern-Simons 理論のことは一旦忘れて、自由なフェルミオンの理論

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{fermion}}[\psi] \tag{付録 A.12}$$

を多様体 $\mathcal{M}$ 上で定義することを考えてみましょう。フェルミオンが定義できるためには、$\mathcal{M}$ は**スピン構造**（***spin structure***）をもてるような多様体であることが要請されます。スピン構造とは、端的に言ってフェルミオンの境界条件のことであり、すべての非可縮なループに対して周期的境界条件（+）ないし反周期的境界条件（−）を指定したとき、$\mathcal{M}$ はあるスピン構造をもつ、といいます。たとえば、トーラス T^2 には図 8 のようにループが非可縮になる方向が 2 つ（longitudinal 方向と meridional 方向）ありますが、そのそれぞれについて 2 通りの境界条件がの選択肢があるので、T^2 には

$$(L, M) \in \{(+,+), (+,-), (-,+), (-,-)\} \tag{付録 A.13}$$

の 4 通りの可能なスピン構造がある、などと言います。

フェルミオンの可能な境界条件が周期的か反周期的かの 2 択なのは、3 次元でのフェルミオンが SO(3) の 2 重被覆群 Spin(3) $\simeq$ SU(2) で変換される場であることと関係しています。たとえば、SO(3) での z 軸周りの 2π 回転の変換は、ベクトル表現では恒等変換 $U_{\text{vec}}(e^{2\pi i L_z}) = 1$ ですが、フェルミオンのような半整数スピンのスピノル表現（すなわち、2 重被覆群 Spin(3) の表現）では -1 に対応 $U_{\text{spinor}}(e^{2\pi i S_z}) = -1$ し、4π 回転してはじめて恒等変換になります。

したがって、あるループにそってフェルミオンを平行移動させ一周したとき、接空間の正規直交枠が $2m\pi$ 回転して元に戻ってきたとしても、フェルミオンの変換にはこの符号の分だけの不定性が残ってしまうということです。多様体のスピン構造を指定することは、この不定性を除き、あるループに沿った一周分の平行移動で正規直交枠に生じる恒等変換がスピノル表現の 1 に持ち上がるのか -1 に持ち上がるのかを指定すること、と言い換えられます。スピン構造をもてるような多様体 $\mathcal{M}$ に対してそのスピン構造を指定したとき、もとの多様体とスピン構造の 2 つ組を**スピン多様体**（***spin manifold***）と呼びます。

A.3.2　Spin$_C$ 接続

さて、非可縮なループに対しては、周期的境界条件（+）か反周期的境界条件（−）かの選択の余地がありましたが、可縮なループ $\Gamma = \partial S$ に対しては、これは必ず周期的境界条件でなくてはなりません。もし反周期的境界条件が許されるなら、可縮なループを連続的に 1 点に収縮したときフェルミオンの符号が不定となり well-defined な場にならないためです。これが満たされないとき、フェルミオンは ill-defined な場となり、多様体はスピン構造をもつことができません。

多様体がスピン構造をもてるかどうかは、**第 2 Stiefel-Whitney 類**（***the second Stiefel-Whitney class***）$\omega_2 \in H^2(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$ と呼ばれる $\mathbb{Z}_2$ 値の 2 次コホモロジー類で判定され、これが自明（$w_2 = 0$）なとき多様体はスピン構造をもつことができ、非自明（$\omega_2 = 1$）なとき多様体はスピン構造を持つことができません。以下では特に、可縮なループ Γ の内部 S で ω_2 を積分したとき、

$$\int_S \omega_2 = \begin{cases} 1 & (\text{フェルミオンが } \Gamma \text{ に沿って反周期的}) \\ 0 & (\text{フェルミオンが } \Gamma \text{ に沿って周期的}) \end{cases} \tag{付録 A.14}$$

という点だけ押さえておけば後の議論に支障はありません。スピン構造をもてない多様体の例には、複素次元が偶数の射影空間などがあります。

ところで、スピン構造を持てないような多様体の上でも、Stiefel-Whitney 類を使うとフェルミオンが定義できるトリックがあります。このトリックには、以下のように奇妙な境界条件を満たす「ゲージ場」を用います。通常の U(1) ゲージ場（U(1) 接続）には

$$\int \frac{\mathrm{d}a}{2\pi} \in \mathbb{Z} \tag{付録 A.15}$$

を満たすという条件（フラックスの量子化）がありましたが、これを少し変えた

$$\int \frac{\mathrm{d}\tilde{a}}{2\pi} = \int \frac{w_2}{2} \mod \mathbb{Z} \tag{付録 A.16}$$

を満たすような「ゲージ場」$\tilde{a}$ を考えます。このような条件をみたす $\tilde{a}$ を、**Spin_C 接続**（***Spin_C connection***）と呼びます。ここに、ω_2 は第 2 Stiefel-Whitney 類です。その上で、フェルミオンにこの Spin_C 接続 $\tilde{a}$ を電荷 1 で結合させて

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_{\mathrm{fermion}}[\psi, \tilde{a}] \tag{付録 A.17}$$

のような理論を考えることで、以下のようにスピン構造を持てない多様体の上でもフェルミオンを定義することができます[*21]。

実際、フェルミオンが反周期的になるような可縮なループ Γ に沿って移動させると、フェルミオンは反周期的境界条件から位相 (-1) を獲得し、一方で、Γ の内側を貫く $\tilde{a}$ のフラックス $\mathrm{d}\tilde{a}/(2\pi) = \omega_2/2 = 1/2$ から、AB 位相 $e^{2\pi i \cdot (1/2)} = -1$ を獲得します。その結果、これらの位相がうまくキャンセルし、フェルミオンが well-defined になるような周期的境界条件にしたがうようになります。また、フェルミオンが周期的になるような可縮なループに対しては、Stiefel-Whitney 類の積分は消える $\int \omega_2 = 0$ ので、いずれの場合でもフェルミオンが well-defined になるようにはたらいてくれています。

A.3.3　電荷・統計対応

「フェルミオニックな励起にはいつも Spin_C 接続が奇数電荷で結合する」と約束しておくことで、スピン構造を持てないような多様体の上でもフェルミオンの解析をすることができます。また、それればかりか、スピン構造を持てるような多様体の上でも、特定のスピン構造を選ばずに議論することができます。奇数電荷、と特定したのは、偶数電荷との結合に対しては Spin_C 接続が誘起する AB 位相は通常のゲージ場のそれと同一になるからです。

これを物性理論に応用したのが、冒頭でのべた電荷・統計対応です。「フェルミオニック（ボゾニック）な励起にはいつも Spin_C 接続が奇数（偶数）電荷で結合する」というのは、場の理論が多様体のスピン構造によらないための数学的なトリックでしたが、これは電子系の条件「フェルミオニック（ボゾニック）な励起は、奇数（偶数）の EM 電荷をもつ」に驚くほどよく似ています。そこで、EM外場がSpin $_C$ 接続であると宣言する

[*21] 正確に言うと、多様体がいつでもスピン構造を持てたわけではないのと同様に、いつでも Spin_C 構造を持てるとは限りません。これを判定するには 3 次の Stiefel-Whitney 類 ω_3 を見る必要があるのですが、本ノートでは、Spin_C 構造が許されるような多様体だけに限定して議論を進めます。

ことで、「奇数 EM 電荷＝フェルミオン、偶数 EM 電荷＝ボゾン」という関係を自然に場の理論に組み込み、しかも同時に多様体のスピン構造によらない方法で議論を進めることができます。

ポイント　18

「奇数（偶数）の EM 電荷をもつ粒子はフェルミオン（ボゾン）」という電荷・統計対応は、EM 外場 A を Spin_C 接続として扱うことで自動的に組み込むことができる。

A.4　粒子・渦糸双対性

3 次元場の理論で Chern-Simons 項が現れる例として、**粒子・渦糸双対（*particle-vortex duality*）**と呼ばれる 2 つのボゾンの理論の間の双対性を紹介します。これは、3 次元場の理論の**双対性の網（*duality web*）**と呼ばれる構造の骨組みとなるパーツのひとつです。

物理的なモチベーションの紹介として、強相関ボゾン系のもっとも基本的な格子模型である（ボゾンの）Hubberd 模型

$$H = -t \sum_{\langle i,j|i,j\rangle} b_i^\dagger b_j + h.c. + U \sum_i n_i(n_i - 1) \qquad (\text{付録 A.18})$$

を考えます。第 1 項は最近接ホッピング項、最終項はボゾンのハードコア相互作用です。この模型は $U/t \ll 1$ の領域では大域的な U(1) 対称性が自発的に破れて超流動相となり、$U/t \gg 1$ の領域では Mott 絶縁体相となります。

この二相の間の相転移は、相転移点近傍で質量項をもつ複素スカラー場の理論

$$\mathcal{L}_B = |D_A\phi|^2 - r^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4 \qquad (\text{付録 A.19})$$

によって記述することができ、それぞれの相はこのスカラー場が凝縮している相（$\langle\phi\rangle \neq 0$）と凝縮していない相（$\langle\phi\rangle = 0$）に対応しています。$(2+1)$ 次元ではこの臨界点は Wilson-Fisher 固定点によって記述され、以下ではこの固定点上のスカラー場の理論を形式的に

$$\mathcal{L}_{WF} = |D_A\phi|^2 - |\phi|^4 \qquad (\text{付録 A.20})$$

と書くことにしましょう。質量項 $-r^2|\phi|^2$ はこの固定点まわりのレレバントな摂動であって、$r^2 > 0$ のとき $\langle\phi\rangle = 0$ の Mott 絶縁体相、$r^2 < 0$ のとき $\langle\phi\rangle \neq 0$ の超流動相に対応します。

さて、スカラー場が凝縮した超流動相（$\phi = (v/\sqrt{2})e^{-i\theta}$）では、南部・ゴールドストーンボゾンとしてコンパクトなボゾン θ が現れ、このボゾンについての渦糸を考えることができます。この渦糸は有限のエネルギーを持つ励起で、擬似的に空間 2 次元の系の粒子として扱うことができます。実際、簡単な計算により、この渦糸同士は Coulomb 相互作用と同じべき則の相互作用をすることを示すことができます。ここで、逆に、この渦糸を基本的な場とするようなスカラー場の理論を作ることができます。以下では、この双対性を具体的に構成していきましょう。

まず、超流動相ではラグランジアン (付録 A.20) は 2 形式の補助場 ξ を用いて

$$\mathcal{L}_{WF} = \frac{v^2}{2}(\mathrm{d}\theta + A) \wedge \star(\mathrm{d}\theta + A) = -\frac{1}{2v^2}\xi \wedge \star\xi + \xi \wedge (\mathrm{d}\theta + A) \qquad (\text{付録 A.21})$$

と書けます。$\theta = \theta_{\mathrm{reg}} + \theta_{\mathrm{sing}}$ のように正則な部分と特異な部分（渦糸）に分けると、正則な部分については部分積分ができる（一方、特異な部分は表面項が消えないので部分積分できない）ので、θ_{reg} の積分は未定乗数項として $\mathrm{d}\xi = 0$ の拘束条件を与えることになります。この拘束条件をみたす ξ は、局所的には U(1) ゲージ場 b を用いて必ず $\xi = (1/2\pi)\mathrm{d}b \equiv (1/2\pi)f$ の形で書けるので、結局もとのラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{WF} = -\frac{1}{8\pi^2 v^2} f \wedge \star f + b \wedge \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{sing}}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} b \wedge \mathrm{d}A \qquad (\text{付録 A.22})$$

と書き換えられます。第 1 項のマクスウェル項は Mott 絶縁体相の低エネルギー側ではイレレバントなので、以下では無視しましょう。第 2 項について、θ の周期性から

$$\int \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{sing}}}{2\pi} \in \mathbb{Z} \tag{付録 A.23}$$

となり、整数値に値を取るこの積分は、ある 2 次元曲面をつらぬく渦糸の本数を与えていると考えることができます。より物理的には、時間成分 $(\mathrm{dd}\theta_{\mathrm{sing}})^0 = \nabla \times (\nabla\theta_{\mathrm{sing}})$ に着目すると、空間方向の周回積分が領域内の渦糸の数密度を与える、と言い換えてよいでしょう。

そこで、渦糸を新たな物質場 Φ としてそのカレントを $j_\Phi = \mathrm{dd}\theta_{\mathrm{sing}}/2\pi$ とすると、

$$\tilde{\mathcal{L}}_{WF} = b \wedge j_\Phi + \frac{1}{2\pi} b \wedge \mathrm{d}A \tag{付録 A.24}$$

と書き換えることができます。カレント j_Φ を Wilson-Fisher 固定点にあるダイナミカルな物質場を用いてあらわに書くと、

$$\tilde{\mathcal{L}}_{WF} = |D_b\Phi|^2 - |\Phi|^4 + \frac{1}{2\pi} b \wedge \mathrm{d}A \tag{付録 A.25}$$

という、元のラグランジアン (付録 A.20) と **BF 項（*BF term*）** の分だけ異なったラグランジアンが得られます。

これら 2 つのラグランジアンは、異なる物理的描像によって同じ固定点を記述している、という点が重要です。すなわち、ラグランジアン (付録 A.20) は電磁気的な U(1) 対称性についての（以下、「EM の」とよぶ）電荷をもったボゾンの描像である一方で、ラグランジアン (付録 A.25) は渦糸の描像を基本とし、渦糸がその電荷を運ぶ創発したゲージ場が代わりに BF 項を通じて外場と結合しているわけです。

付録 B　速習：２次元共形場理論

この章では、本文中の議論で必要になる 2 次元共形場理論（CFT）の基本事項を簡単におさらいします。

（準備中）

B.1　プライマリ場・演算子積展開・相関関数

B.2　自由ボソン・自由フェルミオンの理論

B.3　共形ブロック

B.3.1　S 行列・T 行列

B.4　カレント代数・Wess-Zumino-Witten 模型

付録 C　速習：モジュラーテンソル圏

（準備中）

C.1 フュージョン圏、F 行列

C.2 ブレイド、R 行列

C.3 フェルミオンの扱い

C.4 具体例：エニオン模型いろいろ

付録 D　速習：朝永・Luttinger 液体

6 で見たように、FQH のエッジは線形分散のギャップレスな励起をもった、空間 1 次元のフェルミオン系です。こうした低次元の電子系では、電子間相互作用の影響がより顕著になり、空間 3 次元系では見られない普遍性が見えることがあります。その最たる例として、線形分散のギャップレス励起をもった1次元系では、その基本的な自由度（ボゾン、フェルミオン、量子スピン……）がどんなものであれ、IR 領域の物理がいつでも自由ボゾン系として記述できることが知られています。この自由ボゾン系は**朝永・Luttinger 液体**（***Tomonaga-Luttinger liquid***）と呼ばれ、幅広いクラスの強相関系の解析に用いられています。

本章では、1 次元フェルミオン系から出発し、これを 1 次元ボゾン系に書き直す、**ボゾン化**（***Bosonization***）とよばれる手法を、本ノートに必要な範囲で手短に紹介します。

（準備中）

D.1 カイラル Luttinger 液体

D.2 ボゾン化

D.3 Kane-Fisher-Polchinski（KFP）理論

付録 E　フラックスの挿入を用いた思考実験

FQH トポロジカル物性の文脈では、特定のエニオン励起の存在やホール伝導度の量子化を示すために、よくフラックスを用いた思考実験が語られます。多くの場合、系に開いた穴に整数本のフラックスを断熱的に通し、その前後でバルクのエネルギースペクトラムが不変に保たれるという事実を利用します。

E.1 AB 位相と Byers-Yang の定理

（準備中）

Byers-Yang の定理（***Byers-Yang theorem***）と呼ばれる以下の定理が知られています [Byers and Yang, 1961]。

> Byers-Yang の定理
>
> フラックス Φ を囲む系のどんな物理的性質も、磁束量子 $\Phi_0 = 2\pi$ を周期として周期的に変化する。

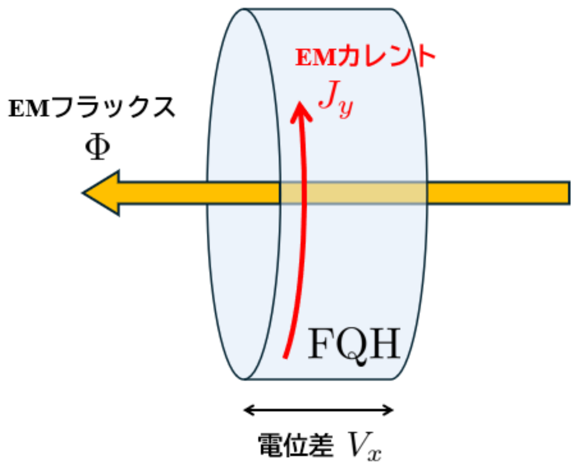


図 9　Enter Caption

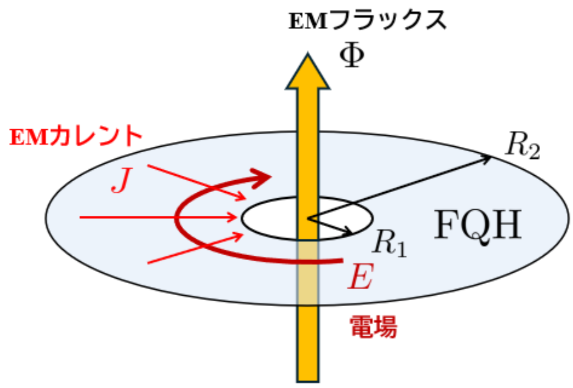


図 10　ヴァイソン

E.2　Laughlin の議論

本ノートではあまり触れませんでしたが、IQH で、ホール伝導度が整数に量子化される理由を鮮やかに示した **Laughlin の議論**（***Laughlin's discussion***）と呼ばれる思考実験があります [Laughlin, 1981] [*22] 。

まず、図 9 のように、円周 L のシリンダー状の 2 次元系を考え、内部の穴にフラックス $\Phi(t)$ を断熱的に挿入し、$\Delta\Phi$ まで増加させます。この過程で、シリンダーの輪方向には誘導起電力 $\dot{\Phi}(t)$ が生じ、これが EM 電荷を運ぶことで P だけの仕事率で仕事 ΔE をします。電気回路の仕事率は電圧と電流の積で与えられたので、シリンダーの輪方向の電流を J_y とすると、$P = J_y\dot{\Phi}(t)$ が得られます。これより、フラックスが系にした合計の仕事を ΔE とすると、

$$J_y = \frac{\Delta E}{\Delta\Phi} \tag{付録 E.1}$$

がしたがいます。

一方、挿入するフラックスを磁束量子 1 本分 $\Delta\Phi = 2\pi$ とすると、Byers-Yang の定理から AB 位相がラージゲージ変換で消せるので、バルクの物理は変化しません。したがって、仕事 ΔE は、バルクに何の変化も残さずに、片方のエッジからもう片方のエッジに n 個の電子を移動させたことによる変化だと考えることができます。このとき、エッジの間の電位差を V_x とすると $\Delta E = nV_x$ となり、以上 2 式から

$$J_y = \frac{n}{2\pi}V_x \tag{付録 E.2}$$

がしたがいます。これは、ホール伝導度が整数に量子化される IQH にほかならず、ここまでの議論によって IQH の存在が物理的に示されました。

E.3　ヴァイソンと U(1) エンリッチメント

フィリング ν の FQH には、EM 電荷が ν、（トポロジカル）スピンが $\nu/2$ の**ヴァイソン**（***vison***）と呼ばれる可換エニオン $\boldsymbol{v}$ が必ず一意に存在することが知られています [Cheng et al., 2025]。また、より一般に、FQH を記述する TQFT は、ヴァイソン $\boldsymbol{v}$（と、そのフュージョンの意味でのべき $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}^2, \cdots\}$）を含むような、空でない可換エニオンの集合を含みます。

[*22] 単に「Laughlin の議論」というと一意に定まらなさそうな気がするかもしれませんが、この思考実験はあまりにも有名なので、少なくとも量子ホール系の文脈で「Laughlin の議論」といったときには、ここで紹介する内容を指していると思ってよいと思います。

このヴァイソンは、各エニオンにどのように EM 電荷を分配するか、という U(1) エンリッチメントの方法を指定するもので、ヴァイソンを 1 つ決めると、エニオン $\boldsymbol{a}$ の電荷 $Q(\boldsymbol{a})$ が

$$e^{2\pi i Q(\boldsymbol{a})} = \theta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}) \tag{付録 E.3}$$

のように、ヴァイソンとのブレイディングによって（mod 1 で）決まります。以下で、ヴァイソンを存在とその性質を、フラックスを用いた思考実験によって示していきましょう。

図 10 のように、内径 R_1、外径 R_2（$0 < R_1 \ll R_2$）の穴の開いた円環状の 2 次元系を考え、この系がフィリング ν の FQH をなしているとします。初めに、中央の穴にフラックス $\Phi(t)$ を通すことを考えます。これによって、円環上には反時計回りに $A = \Phi(t)/(2\pi r)$ のベクトルポテンシャルが誘起されます。その結果、それとは逆向きの時計回りに電場 $E = \dot{\Phi}(t)/(2\pi r)$ が生じ、したがってホール電流 $J = (\nu/2\pi)\dot{\Phi}(t)$ が内向きに生じます。フラックスの時間変化が断熱的だとすると、フラックスの変化 $\Delta\Phi$ によって、円環の内側のエッジに $(\nu/2\pi)\Delta\Phi$ だけの EM 電荷が集まることになり、また、外側のエッジには逆符号の EM 電荷が集まることが分かります。

ここで、磁束量子 1 本分 $\Delta\Phi = 2\pi$ だけのフラックスを挿入したとすると、Byers-Yang の定理から AB 位相がラージゲージ変換で消せるので、バルクのエネルギースペクトラムは変化しません。したがって、上のプロセスは単に、電荷 ν のエニオンをバルクで対生成し、円環の内側と外側のエッジに寄せた、と見ることができます。これは初めに紹介したヴァイソン $\boldsymbol{v}$ にほかなりません。

また、このとき、穴の周りにエニオン $\boldsymbol{a}$ を反時計回りに 1 周させて生じる位相は、ヴァイソンとエニオン $\boldsymbol{a}$ のブレイディングなので $\theta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})$ です。一方、これはフラックス 2π の周りを周回したときの AB 位相と見ることもできるので、$\boldsymbol{a}$ の EM 電荷を $Q(\boldsymbol{a})$ として、$e^{2\pi i Q(\boldsymbol{a})}$ の位相が生じると考えることもできます。これらは互いに一致するべきなので、(付録 E.3) がしたがいます。特に、$\boldsymbol{v}$ 自身のツイストに対しては、

$$\theta(\boldsymbol{v}) = e^{i\pi\nu} \tag{付録 E.4}$$

が成り立ちます。したがって、$\boldsymbol{v}$ のスピンが $\nu/2$ であることも分かりました。

以上のことから、各エニオンへ EM 電荷を割り振る（U(1) エンリッチメントする、あるいは対称性を分数化する）方法は、ヴァイソン $\boldsymbol{v}$ をひとつ決めると自動的に決まります。また、分数のホール伝導度に対してはヴァイソンが必ずエニオンになることが分かり、したがってヴァイソンと非自明なブレイディングをもつ粒子は自動的に分数の EM 電荷をもつことになります。このことは、標語的に、「ヴァイソンは各エニオンの EM 電荷を mod 1 で決める」と言うことができるでしょう。

また、この議論から、ボゾニックな IQH に対しては、フィリングは必ず偶数でなくてはならないこともしたがいます。なぜなら、もしホール係数が奇数なら、ヴァイソンがスピン 1/2 となり、理論がフェルミオンを含むことになってボゾニックであることに反するからです。ただし、逆は成り立ちません。

ポイント 19

フィリング ν の FQH には、EM 電荷 ν、スピン $\nu/2$ のヴァイソン $\boldsymbol{v}$ が必ず存在し、ほかのエニオン $\boldsymbol{a}$ の EM 電荷を $\boldsymbol{v}$ とのブレイディングによって $e^{2\pi i Q(\boldsymbol{a})} = \theta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})$ と自動的に決める。

ポイント 20

ボゾニックな IQH では、フィリングは必ず偶数である（逆は成り立たない）。

参考文献

D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard, “Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit,” *Physical Review Letters*, vol. 48, no. 22, pp. 1559–1562, May 1982. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1982PhRvL..48.1559T

G. Moore and N. Read, “Nonabelions in the fractional quantum hall effect,” *Nuclear Physics B*, vol. 360, no. 2, pp. 362–396, Aug. 1991. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1991NuPhB.360..362M

K. V. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, “New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance,” *Physical Review Letters*, vol. 45, no. 6, pp. 494–497, Aug. 1980. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1980PhRvL..45..494K

R. Willett, J. P. Eisenstein, H. L. Stormer, A. C. Gossard, and D. C. Tsui, “Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum Hall effect,” *Physical Review Letters*, vol. 59, no. 15, pp. 1776–1779, Oct. 1987. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1987PhRvL..59.1776W

X.-G. Wen, “Theory of the Edge States in Fractional Quantum Hall Effects,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 6, no. 10, pp. 1711–1762, Jan. 1992. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1992IJMPB...6.1711W

W. Kohn, “Cyclotron Resonance and de Haas-van Alphen Oscillations of an Interacting Electron Gas,” *Physical Review*, vol. 123, no. 4, pp. 1242–1244, Aug. 1961. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1961PhRv..123.1242K

E. J. Bergholtz, T. H. Hansson, M. Hermanns, and A. Karlhede, “Microscopic theory of the quantum hall hierarchy,” *Physical Review Letters*, vol. 99, p. 256803, Dec 2007. [Online]. Available: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.256803

R. B. Laughlin, “Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations,” *Physical Review Letters*, vol. 50, no. 18, pp. 1395–1398, May 1983. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1983PhRvL..50.1395L

J. K. Jain, “Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect,” *Physical Review Letters*, vol. 63, no. 2, pp. 199–202, Jul. 1989. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1989PhRvL..63..199J

J. K. Jain, “Theory of the fractional quantum Hall effect,” *Physical Review B*, vol. 41, no. 11, pp. 7653–7665, Apr. 1990. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1990PhRvB..41.7653J

理論物理学教程ファン, “くりこみ群をくりこみ半群と呼ばない心｜ note,” 5 2023, [Online; accessed 2025-11-25]. [Online]. Available: https://note.com/landau_fun/n/n2cd06ff49c7b

克. 大野, 晴. 田崎, and 清. 東島, “くりこみ理論の地平,” 4 1997, [Online; accessed 2025-11-25]. [Online]. Available: https://www.gakushuin.ac.jp/~881791/r.htm

M. F. Atiyah, “Topological quantum field theory,” *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, vol. 68, no. 1, pp. 175–186, 1988.

D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, “Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential,” *Physical Review Letters*, vol. 49, no. 6, pp. 405–408, Aug. 1982. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1982PhRvL..49..405T

R. B. Laughlin, “Quantized Hall conductivity in two dimensions,” *Physical Review B*, vol. 23, no. 10, pp. 5632–5633, May 1981. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1981PhRvB..23.5632L

S. C. Zhang, T. H. Hansson, and S. Kivelson, “Effective-field-theory model for the fractional quantum Hall effect,” *Physical Review Letters*, vol. 62, no. 1, pp. 82–85, Jan. 1989. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1989PhRvL..62...82Z

R. D. Pisarski and S. Rao, “Topologically massive chromodynamics in the perturbative regime,” *Physical Review D*, vol. 32, no. 8, pp. 2081–2096, Oct. 1985. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1985PhRvD..32.2081P

F. Wilczek and A. Zee, “Linking Numbers, Spin, and Statistics of Solitons,” *Physical Review Letters*, vol. 51, no. 25, pp. 2250–2252, Dec. 1983. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1983PhRvL..51.2250W

T. H. Hansson, M. Hermanns, S. H. Simon, and S. F. Viefers, “Quantum hall physics: Hierarchies and conformal field theory techniques,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 89, no. 2, p. 025005, 23 May 2017. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.89.025005

S. M. Girvin and A. H. MacDonald, “Off-diagonal long-range order, oblique confinement, and the fractional quantum Hall effect,” *Physical Review Letters*, vol. 58, no. 12, pp. 1252–1255, Mar. 1987. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1987PhRvL..58.1252G

N. Read, “Order parameter and Ginzburg-Landau theory for the fractional quantum Hall effect,” *Physical Review Letters*, vol. 62, no. 1, pp. 86–89, Jan. 1989. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1989PhRvL..62...86R

B. I. Halperin, P. A. Lee, and N. Read, “Theory of the half-filled Landau level,” *Physical Review B*, vol. 47, no. 12, pp. 7312–7343, Mar. 1993. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1993PhRvB..47.7312H

D. T. Son, “Is the Composite Fermion a Dirac Particle?” *Physical Review X*, vol. 5, no. 3, p. 031027, Jul. 2015. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2015PhRvX...5c1027S

N. Read, “Excitation structure of the hierarchy scheme in the fractional quantum Hall effect,” *Physical Review Letters*, vol. 65, no. 12, pp. 1502–1505, Sep. 1990. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1990PhRvL..65.1502R

X. G. Wen and A. Zee, “Classification of Abelian quantum Hall states and matrix formulation of topological fluids,” *Physical Review B*, vol. 46, no. 4, pp. 2290–2301, Jul. 1992. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1992PhRvB..46.2290W

S. H. Simon, *Topological Quantum*. Oxford University Press, 09 2023. [Online]. Available: https://doi.org/10.1093/oso/9780198886723.001.0001

P. H. Bonderson, “Non-Abelian Anyons and Interferometry,” Ph.D. dissertation, California Institute of Technology, Jan. 2012.

N. Seiberg, T. Senthil, C. Wang, and E. Witten, “A duality web in 2+1 dimensions and condensed matter physics,” *Annals of Physics*, vol. 374, pp. 395–433, 2016. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491616301531

X.-G. Wen, “Topological orders and edge excitations in fractional quantum Hall states,” *Advances in Physics*, vol. 44, no. 5, pp. 405–473, Sep. 1995. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1995AdPhy..44..405W

S. M. Girvin and T. Jach, “Formalism for the quantum Hall effect: Hilbert space of analytic functions,” *Physical Review B*, vol. 29, no. 10, pp. 5617–5625, May 1984. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1984PhRvB..29.5617G

J. K. Jain, *Composite Fermions*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

F. D. M. Haldane, “Many-particle translational symmetries of two-dimensional electrons at rational

Landau-level filling," *Physical Review Letters*, vol. 55, no. 20, pp. 2095–2098, Nov. 1985. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1985PhRvL..55.2095H

V. L. Pokrovsky and A. L. Talapov, "A simple model for fractional Hall effect," *Journal of Physics C Solid State Physics*, vol. 18, no. 23, pp. L691–L694, Aug. 1985. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1985JPhC...18L.691P

S. A. Trugman and S. Kivelson, "Exact results for the fractional quantum Hall effect with general interactions," *Physical Review B*, vol. 31, no. 8, pp. 5280–5284, Apr. 1985. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1985PhRvB..31.5280T

H. Kjønsberg and J. M. Leinaas, "On the Anyon Description of the Laughlin Hole States," *International Journal of Modern Physics A*, vol. 12, no. 11, pp. 1975–2001, Jan. 1997. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1997IJMPA..12.1975K

F. D. M. Haldane, "Fractional Quantization of the Hall Effect: A Hierarchy of Incompressible Quantum Fluid States," *Physical Review Letters*, vol. 51, no. 7, pp. 605–608, Aug. 1983. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1983PhRvL..51..605H

B. I. Halperin, "Statistics of Quasiparticles and the Hierarchy of Fractional Quantized Hall States," *Physical Review Letters*, vol. 52, no. 18, pp. 1583–1586, Apr. 1984. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1984PhRvL..52.1583H

M. Greiter, "Microscopic formulation of the hierarchy of quantized Hall states," *Physics Letters B*, vol. 336, no. 1, pp. 48–53, Sep. 1994. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1994PhLB..336...48G

N. Read and E. Rezayi, "Beyond paired quantum Hall states: Parafermions and incompressible states in the first excited Landau level," *Physical Review B*, vol. 59, no. 12, pp. 8084–8092, Mar. 1999. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1999PhRvB..59.8084R

S. Fubini and C. A. Lütken, "Vertex Operators in the Fractional Quantum Hall Effect," *Modern Physics Letters A*, vol. 6, no. 6, pp. 487–500, Jan. 1991. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1991MPLA....6..487F

C. Nayak and F. Wilczek, "2 n-quasihole states realize 2 $^{n-1}$-dimensional spinor braiding statistics in paired quantum Hall states," *Nuclear Physics B*, vol. 479, no. 3, pp. 529–553, Feb. 1996. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1996NuPhB.479..529N

E. Ardonne and G. Sierra, "Chiral correlators of the Ising conformal field theory," *Journal of Physics A Mathematical General*, vol. 43, no. 50, p. 505402, Dec. 2010. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2010JPhA...43X5402A

A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, "Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory," *Nuclear Physics B*, vol. 241, no. 2, pp. 333–380, Jul. 1984. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1984NuPhB.241..333B

J. B. Zuber and C. Itzykson, "Quantum field theory and the two-dimensional Ising model," *Physical Review D*, vol. 15, no. 10, pp. 2875–2884, May 1977. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1977PhRvD..15.2875Z

E. J. Bergholtz, T. H. Hansson, M. Hermanns, A. Karlhede, and S. Viefers, "Quantum Hall hierarchy wave functions: From conformal correlators to Tao-Thouless states," *Physical Review B*, vol. 77, no. 16, p. 165325, Apr. 2008. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2008PhRvB..77p5325B

J. Suorsa, S. Viefers, and T. H. Hansson, "Quasihole condensates in quantum Hall liquids," *Physical Review B*, vol. 83, no. 23, p. 235130, Jun. 2011. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2011PhRvB..83w5130S

J. Suorsa, S. Viefers, and T. H. Hansson, "A general approach to quantum Hall hierarchies," *New Journal of Physics*, vol. 13, no. 7, p. 075006, Jul. 2011. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2011NJPh...13g5006S

P. Bonderson and J. K. Slingerland, "Fractional quantum Hall hierarchy and the second Landau level," *Physical Review B*, vol. 78, no. 12, p. 125323, Sep. 2008. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2008PhRvB..78l5323B

M. Levin and B. I. Halperin, "Collective states of non-Abelian quasiparticles in a magnetic field," *Physical Review B*, vol. 79, no. 20, p. 205301, May 2009. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2009PhRvB..79t5301L

C. Zhang, A. Vishwanath, and X.-G. Wen, "Hierarchy construction for non-abelian fractional quantum hall states via anyon condensation," *Phys. Rev. B*, vol. 112, p. 125116, Sep 2025. [Online]. Available: https://link.aps.org/doi/10.1103/jndb-435f

M. Hermanns, "Condensing Non-Abelian Quasiparticles," *Physical Review Letters*, vol. 104, no. 5, p. 056803, Feb. 2010. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2010PhRvL.104e6803H

A. M. Chang, "Chiral Luttinger liquids at the fractional quantum Hall edge," *Reviews of Modern Physics*, vol. 75, no. 4, pp. 1449–1505, Nov. 2003. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2003RvMP...75.1449C

S. Elitzur, G. Moore, A. Schwimmer, and N. Seiberg, "Remarks on the canonical quantization of the chern-simons-witten theory," *Nuclear Physics B*, vol. 326, no. 1, pp. 108–134, 1989. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321389904367

E. Witten, "Quantum field theory and the jones polynomial," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 121, no. 3, pp. 351–399, 1989.

C. Zhang, A. Vishwanath, and X.-G. Wen, "Hierarchy construction for non-abelian fractional quantum hall states via anyon condensation," 2025. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2406.12068

D. Tong, "The quantum hall effect," [Online; accessed 2025-11-25]. [Online]. Available: https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qhe.html

A. Zee, "Quantum hall fluids," *arXiv [cond-mat]*, 6 Jan. 1995. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1007/BFb0113369

A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, 2nd ed. Princeton University Press, 2010.

A. Zee, "ジー先生の場の量子論 基礎編," 2020, 原田恒司・筒井泉 訳.

A. Zee, "ジー先生の場の量子論 応用編," 2025, 原田恒司・筒井泉 訳.

J. McGreevy, "Generalized symmetries in condensed matter," *Annual Review of Condensed Matter Physics*, vol. 14, no. Volume 14, 2023, pp. 57–82, 2023. [Online]. Available: https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev-conmatphys-040721-021029

T. D. Brennan and S. Hong, "Introduction to generalized global symmetries in qft and particle physics," 2023. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2306.00912

L. Bhardwaj, L. E. Bottini, L. Fraser-Taliente, L. Gladden, D. S. W. Gould, A. Platschorre, and H. Tillim, "Lectures on generalized symmetries," 2023. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2307.07547

N. Byers and C. N. Yang, "Theoretical Considerations Concerning Quantized Magnetic Flux in Superconducting Cylinders," *Physical Review Letters*, vol. 7, no. 2, pp. 46–49, Jul. 1961. [Online]. Available: https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1961PhRvL...7...46B

M. Cheng, S. Musser, A. Raz, N. Seiberg, and T. Senthil, "Ordering the topological order in the fractional quantum hall effect," 2025. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2505.14767