# お気持ちでふんわり理解する Lie 微分と共変微分

はどろん (@Hadron_kyoto)

2022 年 2 月 23 日

## 1 Derivative – how to define it?

Here let us give a glance over two methodologies to evaluate subtle changes in functions, vectors, or forms defined on generalized spaces as they are infinitesimally transported, just like differentiating functions on Euclidian spaces. It is naturally quite trivial how to differentiate a function or a vector field on a Euclidian space. This is just because of the so-called "flatness"[*1] the space has.

In a "curved" space, strictly defined from a mathematical point of view as a **manifold**, however, this invariance does not work at all. Furthermore, it is usually impossible to discuss whether two arbitrary vectors living in different points of the manifold are parallel with each other or not. It is of great importance to realize the difference between Euclidian spaces and generalized spaces or manifolds, in which vectors living in different spaces are regarded as living in different tangent spaces, so are forms.

Thus, other methods are required to define "derivatives" of vectors or forms on the manifold. Concretely speaking, what we have to define is a method to move a vector to another point in order to compare two vectors living in two separate spaces. The two methods used to do this are **Lie derivative** and **covarient derivative**, the difference between which is the difference in ways to move a vector at all.

## 2 Lie derivative

### 2.1 Lie derivative of a function

Let $\mathcal{M}$ be a n-dimentional $C^\infty$ differenciable manifold, $\bar{U} = \frac{d}{d\lambda}$ and $\bar{V} = \frac{d}{d\mu}$ vector fields, and $f$ a function. Here we postulate enough differentiability to them.

Let us consider an integral curve $\mathfrak{A}$ of $\bar{U}$ through $P$, corresponding parameter $\lambda_0$. Function $f$ has a value on $P$ $f(\lambda_0)$, and on $Q$ separated from $P$ along $\mathfrak{A}$ by $\Delta\lambda$ with respect to parameter, $f(\lambda_0 + \Delta\lambda)$.

If

$$f(\lambda_0) = f(\lambda_0 + \Delta\lambda) \; for \; ^\forall\Delta\lambda,$$

then $f$ is called to be **Lie dragged**. In this case, $f$ is constant everywhere along $\mathfrak{A}$ if $f$ is Lie dragged.

[*1] Namely, when a vector is parallel transported, the vector would be parallel to the original one.

Thus here we can define

$$f^*_{\lambda_0+\Delta\lambda}(\lambda) \equiv f(\lambda_0+\Delta\lambda) \text{ (const.)}$$

by using this, **Lie derivative of function** $f$ can be defined by

$$\mathscr{L}_{\bar{U}} f \equiv \lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{f^*_{\lambda_0+\Delta\lambda}(\lambda_0) - f(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = \left.\frac{df}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}.$$

This is exactly the same as a directional derivative of function $f$ along $\bar{U}$. Given an arbitrary coodinate basis $\{x^i\}$, $\mathscr{L}_{\bar{U}} f$ is

$$\mathscr{L}_{\bar{U}} f = U^j f_{,j}.$$

## 2.2 ベクトルの Lie 微分

英語疲れたのでやっぱり日本語で書きますね。

続いて、ベクトルの Lie 微分を定義していきます。その際、前節で述べたように、ある接空間のベクトルを別の点に移す必要があります。

まず、前節で考えた $P$ と $Q$ を通る、ベクトル場 $\bar{V}$ の積分曲線をそれぞれ $\mathfrak{B}$、$\mathfrak{C}$ とします。[*2]$\mathfrak{B}$ 上の各点について、$\bar{U}$ の積分曲線 $\mathfrak{A}$ に沿って $\Delta\lambda$ だけ進めた点を考え、それらのなす曲線を $\tilde{\mathfrak{B}}$ とします。$Q$ はこの $P$ から $\mathfrak{A}$ に沿って $\Delta\lambda$ だけ離れたところにありますから、$\tilde{\mathfrak{B}}$ は $Q$ を通ります。このとき、$\tilde{\mathfrak{B}}$ は一般に $\mathfrak{C}$ には一致しないことに注意が必要です。

同様の操作を任意の $\Delta\lambda$ について行うと、$\mathfrak{B}$ を元に含むような曲線群が構成でき、この曲線群 $\mathcal{B}$ を $\mathfrak{B}$ の $P$ における **Lie dragging** と呼ぶことにします。

$\mathfrak{B}$ の $P$ における接ベクトルを $\left(\frac{d}{d\mu}\right)_{\lambda_0}(\lambda_0)$、$\mathfrak{C}$ の $Q$ における接ベクトルを $\left(\frac{d}{d\mu}\right)_{\lambda_0+\Delta\lambda}(\lambda_0+\Delta\lambda)$ などと書くことにし、$\tilde{\mathfrak{B}}$ の $Q$ における接ベクトルを $\left(\frac{d}{d\mu}\right)^*_{\lambda_0}(\lambda_0+\Delta\lambda)$ と書くことにします。

このとき、$\tilde{\mathfrak{B}}$ の構成の方法から明らかに、

$$\left[\left(\frac{d}{d\mu}\right)^*_{\lambda_0}, \frac{d}{d\mu}\right] = 0$$

が成り立つことが分かります。これで準備は完了です。

それでは、$P$ における $\bar{U}$ に沿った $\bar{V}$ の Lie 微分を考えていきましょう。まず、先ほどとは逆に $\mathfrak{C}$ の $Q$ における Lie dragging を考え、このうち $P$ を通る曲線、すなわち $\tilde{\mathfrak{C}}$ を考えましょう。今考えたかったのは $Q$ のベクトルを $P$ にもってくることですが、$\tilde{\mathfrak{C}}$ の接ベクトル $\left(\frac{d}{d\mu}\right)^*_{\lambda_0+\Delta\lambda}(\lambda_0)$ がいい感じにほしいベクトルになっていそうです。そこで、$P$ における $\bar{U}$ に沿った**ベクトル $\bar{V}$ の Lie 微分**を

$$\mathscr{L}_{\bar{U}} \bar{V} \equiv \lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{\bar{V}^*_{\lambda_0+\Delta\lambda}(\lambda_0) - \bar{V}(\lambda_0)}{\Delta\lambda}$$

と定義します。

前節で述べた関数の Lie dragging と本節でのベクトルの Lie dragging は、正確に言えば、積分曲線に沿った関数の引き戻しとベクトルの押し出しなので、概念的には区別されるべきものです。ただ、高階のテンソル

[*2] きしょくない、お行儀のいい多様体を考えます。

や微分形式の引き戻しなどを考えない限り特に困ることはありませんし、なにより関数とベクトルの Lie 微分が表記上同じになるという嬉しさ (？) があります。

さて、上で求めたベクトルの Lie 微分をさらに具体的に計算していくことにしましょう。ベクトル場は関数にかかって意味を持つので、任意の関数として $f$ をとります。

このとき、

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\mu}\right)^{*}(\lambda_0)f &= \left(\frac{d}{d\mu}\right)^{*}(\lambda_0+\Delta\lambda)f - \Delta\lambda\frac{d}{d\lambda}\left\{\left(\frac{d}{d\mu}\right)^{*}(\lambda_0)f\right\} + O(\Delta\lambda^2)\\ &= \left(\frac{d}{d\mu}\right)(\lambda_0+\Delta\lambda)f - \Delta\lambda\left(\frac{d}{d\mu}\right)^{*}(\lambda_0)\left(\frac{d}{d\mu}f\right) + O(\Delta\lambda^2)\\ &= \left(\frac{d}{d\mu}\right)(\lambda_0)f + \Delta\lambda\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\mu}\right)(\lambda_0)f - \Delta\lambda\left(\frac{d}{d\mu}\right)^{*}(\lambda_0)\left(\frac{d}{d\mu}f\right) + O(\Delta\lambda^2)\end{aligned}$$

ここに、2 番目の等号では、

$$\left(\frac{d}{d\mu}\right)^{*}(\lambda_0) = \left(\frac{d}{d\mu}\right)(\lambda_0)$$

および、

$$\left[\left(\frac{d}{d\mu}\right)^{*}, \frac{d}{d\lambda}\right] = 0$$

を用いました。これより、

$$\mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{V}f = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\left\{\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\mu} - \left(\frac{d}{d\mu}\right)^{*}\frac{d}{d\lambda}\right\}f = \left[\frac{d}{d\lambda}, \frac{d}{d\mu}\right]f$$

$$\therefore\ \mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{V} = \left[\bar{U}, \bar{V}\right]$$

が得られます。かなりすっきりした式になりました。ここで、$\left(\frac{d}{d\mu}\right)^{*}$ と $\frac{d}{d\lambda}$ の差は $\Delta\lambda$ の高々 1 次のオーダーであることを用いました。

ここからただちに

$$\mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{V} = -\mathscr{L}_{\bar{V}}\bar{U}$$

が分かります。

関数の Lie 微分は積分曲線に沿った方向微分だったのに対し、ベクトル場の Lie 微分では交換子積が現れます。なんだか背後に潜む Lie 代数の構造が垣間見えているようです。

また、適当な局所座標 $\{x^i\}$ をとって成分を考えてやると、

$$\left(\mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{V}\right)^{i} = U^j V^i_{,j} - V^j U^i_{,j}$$

となります。

## 2.3 微分形式の Lie 微分

関数・ベクトルの Lie 微分が定義できたので、Leibniz 則を要請して微分形式の Lie 微分を定義することができます。[*3]高階のテンソルにも同様に拡張できるので、ここでは 1 形式についてのみ述べます。

[*3] 微分形式の引き戻しで定義することもできます。

$\tilde{\omega}$ を任意の 1 形式とし、$\bar{V}$ を任意のベクトルとします。これらの双対ペアリング $\langle\tilde{\omega}, \bar{V}\rangle$ は関数ですから、$\bar{U}$ に沿った **1 形式 $\tilde{\omega}$ の Lie 微分** $\mathscr{L}_{\bar{U}}\tilde{\omega}$ を以下の式を満たすものとして定義します。

$$\mathscr{L}_{\bar{U}}\langle\tilde{\omega}, \bar{V}\rangle = \langle\mathscr{L}_{\bar{U}}\tilde{\omega}, \bar{V}\rangle + \langle\tilde{\omega}, \mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{V}\rangle$$

局所座標をとって成分を考えると、

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\bar{U}}(\omega_i V^i) &= (\mathscr{L}_{\bar{U}}\tilde{\omega})_i V^i + \omega_i(\mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{V}\rangle)^i \\
(\mathscr{L}_{\bar{U}}\tilde{\omega})_i V^i &= U^i(\omega_j V^j)_{,i} - \omega_i(U^j V^i_{,j} - V^j U^i_{,j}) \\
&= U^i\omega_{j,i}V^j + U^i\omega_j V^j_{,i} - \omega_i U^j V^i_{,j} + \omega_i V^j U^i_{,j} \\
&= (\omega_{j,i}U^i + \omega_j U^j_{,i})V^i
\end{aligned}$$

これが任意の $\bar{V}$ について成り立つので、

$$(\mathscr{L}_{\bar{U}}\tilde{\omega})_i = U^i\omega_{j,i} + \omega_j U^j_{,i}$$

となります。

# 3 共変微分

## 3.1 ベクトルの共変微分

Lie 微分は、ベクトルを別のベクトル場で別の点まで“流して”、その後で同一の点でのベクトルの差を取って定義されたのでした。

一方で、共変微分はベクトルを別の点まで“平行移動”し、そのあとでベクトル同士の差を取って定義されます。しかし、異なる点の接空間に属するベクトル同士は、和はおろか“平行性”すら定義できないので、新たに特別な構造をいれる必要があります。異なる点に住むベクトル同士について、平行性を定義するために導入されるこの構造は、**接続**とよばれます。では、定義していきます。

まず、$c(\lambda)$ を $C^\infty$ 級可微分多様体 $\mathcal{M}$ 上の曲線、$\bar{M}$ をベクトル場とします。また、パラメーター $\lambda_0$ をもつ $c(\lambda)$ 上の $P$ に対し、そこから $\Delta\lambda$ だけ離れた $Q$ を考えます。[*4]

$Q$ 上のベクトル $\bar{M}(\lambda_0 + \Delta\lambda)$ を“何かしらの方法”で $c(\lambda)$ に沿って $P$ まで平行移動できたとしましょう。平行移動して得られた $P$ でのベクトルを $\bar{M}^*_{\lambda_0+\Delta\lambda}(\lambda)$ とします。このとき $P$ における $\bar{U}$ に沿った**ベクトル $\bar{M}$ の共変微分**を

$$\nabla_{\bar{U}}\bar{M} \equiv \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\bar{M}^*_{\lambda_0+\Delta\lambda}(\lambda_0) - \bar{M}(\lambda_0)}{\Delta\lambda}$$

と定義します（もちろん、この段階ではまったく定義できていません）。

というわけで、共変微分の正確な定義を得るため、上に挙げた $\nabla_{\bar{U}}\bar{M}$ にいろいろと制約を課してみましょう。

[*4] “ベクトル $\bar{U}$ に沿った Lie 微分”と言ったとき、$\bar{U}$ は多様体全域で（少なくとも積分曲線の近傍で）定義されている必要がありました。共変微分では、これとは異なり、曲線上以外でベクトル場 $\frac{d}{d\lambda}$ が定義されている必要は必ずしもないことを述べておきます。

まず、$f$ を曲線上で定義された任意の関数として、Leibniz 則

$$\begin{aligned}\nabla_{\bar{U}}(f\bar{M}) &= \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{f(\lambda+\Delta\lambda)\bar{M}^*_{\lambda_0+\Delta\lambda}(\lambda_0)-f(\lambda_0)\bar{M}(\lambda_0)}{\Delta\lambda}\\ &= \lim_{\Delta\lambda\to 0}\left\{f(\lambda+\Delta\lambda)\frac{\bar{M}^*_{\lambda+\Delta\lambda}(\lambda_0)-\bar{M}(\lambda_0)}{\Delta\lambda}+\frac{(f(\lambda_0+\Delta\lambda)-f(\lambda_0)}{\Delta\lambda}\bar{M}(\lambda)\right\}\\ &= f\nabla_{\bar{U}}(\bar{M})+\bar{M}\frac{df}{d\lambda}\end{aligned}$$

が成り立つことが分かります。

次に、曲線 $c(\lambda)$ のパラメーターを $\lambda$ から $\mu$ に取りなおしてみます。このとき、曲線の像は変わりませんが、$c\circ\lambda(\mu)$ という別の曲線になります。このとき、この曲線の接ベクトルは $g=\frac{d\lambda}{d\mu}$ を用いて $\frac{d}{d\mu}=g\bar{U}$ と与えられることが分かるので、共変微分の定義式は、$\Delta\mu=\frac{d\mu}{d\lambda}\Delta\lambda$ を用いて、

$$\begin{aligned}\nabla_{g\bar{U}}\bar{M} &= \lim_{\Delta\mu\to 0}\frac{\bar{M}^*_{\mu_0+\Delta\mu}(\mu_0)-\bar{M}(\mu_0)}{\Delta\mu}\\ &= \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\bar{M}^*_{\lambda_0+\Delta\lambda}(\lambda_0)-\bar{M}(\lambda_0)}{\frac{d\mu}{d\lambda}\Delta\lambda}\end{aligned}$$

となり、これから

$$\nabla_{g\bar{U}}\bar{M}=g\nabla_{\bar{U}}\bar{M}$$

が得られます。[*5]これはいわば曲線に沿った“平行移動”が曲線のパラメーターに依存しないための要請、と見ることもできます。

これに加えて、

$$\left(\nabla_{\bar{U}}\bar{M}\right)_P+\left(\nabla_{\bar{V}}\bar{M}\right)_P=\left(\nabla_{\bar{U}+\bar{V}}\bar{M}\right)_P$$

を要請しておけば十分でしょう。

では、以上のことを踏まえて、曲線の $P$ における接ベクトル $\bar{U}$ に沿ったベクトル $\bar{M}$ の共変微分 $\nabla_{\bar{U}}\bar{M}$ を、以下のような性質を持つものとして定義しなおします。

[1] $\nabla_{f\bar{U}+g\bar{V}}\bar{M}=f\nabla_{\bar{U}}\bar{M}+g\nabla_{\bar{V}}\bar{M}$
[2] $\nabla_{\bar{U}}(\bar{M}+\bar{N})=\nabla_{\bar{U}}\bar{M}+\nabla_{\bar{U}}\bar{N}$ （双線形性）
[3] $\nabla_{\bar{U}}(f\bar{M})=f\nabla_{\bar{U}}(\bar{M})+\bar{M}\frac{df}{d\lambda}$（Leibniz 則）

これで、必要な要請を満たす共変微分が定義できました。

続いて、これが $P$ でのベクトルであることから、適当な局所座標 $\{x^i\}$ を取って、ホロノミック基底 $\{\bar{e}_i\}$ で

$$\begin{aligned}\nabla_{\bar{U}}\bar{M} &= (\nabla_{\bar{U}}\bar{M})^i\bar{e}_i\\ &\equiv \frac{dM^k}{d\lambda}\bar{e}_k+U^jM^i\Gamma^k_{ij}\bar{e}_k\end{aligned}$$

と展開します。ここに、第 2 項の係数 $\Gamma^k_{ij}$ は、

$$\nabla_j\bar{e}_i=\Gamma^k_{ij}\bar{e}_k$$

[*5] $\lambda$ を引数とする $\bar{M}$ と $\mu$ を引数とする $\bar{M}$ は本来区別するべきですが、ここでは同じ記号を使っています。

で定義される係数で、**接続係数**と呼ばれます。[*6]この接続係数 $\Gamma^k_{ij}$ をいろいろと設定することにより、異なる点の接空間の間の“平行移動”を特徴づけることができます。

また、同じ局所座標において、

$$(\nabla_{\bar{U}}\bar{M})^i = \frac{dM^i}{d\lambda} + U^j M^k \Gamma^i_{kj}$$
$$U^j(\nabla_j \bar{M})^i = U^j(M^i_{,j} + M^k\Gamma^i_{kj})$$

すなわち、

$$(\nabla_j \bar{M})^i = M^i_{,j} + M^k\Gamma^i_{kj} \equiv M^i_{;j}$$

が得られます。

さらに、$\nabla_{f\bar{U}+g\bar{V}}\bar{M} = f\nabla_{\bar{U}}\bar{M} + g\nabla_{\bar{V}}\bar{M}$ から、$\nabla\bar{M}$ はベクトルをベクトルに送る線形写像、すなわち $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ テンソル場とみなせることも分かります。つまり、

$$\nabla\bar{M}(\tilde{\omega};\bar{U}) = \langle\tilde{\omega}, \nabla_{\bar{U}}\bar{M}\rangle$$

すなわち

$$(\nabla\bar{M})^i_j = (\nabla_j\bar{M})^i = M^i_{;j}$$

のように表されます。このような $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ テンソル場 $\nabla\bar{M}$ を、ベクトル $\bar{M}$ の**勾配**といいます。この式からも分かるように、これを用いて共変微分の定義から“曲線”を取り去ることができます。テンソル $\nabla\bar{M}$ は、曲線のパラメーターを置かずとも、ベクトル $\bar{M}$ と接続だけで決まるというわけです。

じゃあ、$\nabla$ それ自身は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ テンソルじゃないか！と思われるかもしれませんが、そうみなすことはできません。共変微分の定義 [3] からも分かるように、一般に $\nabla_{\bar{U}}(f\bar{M}) \neq f\nabla_{\bar{U}}(\bar{M})$ であるためです。

## 3.2 関数と高階テンソルの共変微分

ベクトルの共変微分の定義と見比べれば、ベクトル $\bar{U}$ に沿った**関数 $f$ の共変微分**を

$$\nabla_{\bar{U}} f \equiv \langle\tilde{df}, \bar{U}\rangle$$

と定義するのが自然です。[*7]すなわち、

$$\nabla_i f = f_{,i}$$

です。

また、Leibniz 則が成り立つことを要請して、ベクトル $\bar{U}$ に沿った **1 形式 $\tilde{\omega}$ の共変微分**および **2 ベクトル $\bar{V}\otimes\bar{U}$ の共変微分**を以下を満たすものとして定義します。

$$\nabla_{\bar{U}}\langle\tilde{\omega}, \bar{V}\rangle = \langle\nabla_{\bar{U}}\tilde{\omega}, \bar{V}\rangle + \langle\tilde{\omega}, \nabla_{\bar{U}}\bar{V}\rangle$$
$$\nabla_{\bar{U}}(\bar{V}\otimes\bar{W}) = (\nabla_{\bar{U}}\bar{V})\otimes\bar{W} + \bar{V}\otimes(\nabla_{\bar{U}}\bar{W})$$

高階のテンソルについても、同様の方法で拡張できます。

---

[*6] $\nabla_i \equiv \nabla_{\bar{e}_i}$ としました。

[*7] 0-ベクトル、すなわち関数の勾配は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ テンソル場であり、ベクトル解析でいう勾配 grad$f$ に一致します。

最後に、局所座標を取ったときの 1 形式の共変微分の成分について述べておきます。余接空間の双対基底を $\{\tilde{\omega}^i\}$ とすると、

$$\begin{aligned}\nabla_j\langle\tilde{\omega}^i,\bar{V}_i\rangle &= \langle\nabla_j\tilde{\omega}^i,\bar{V}_i\rangle + \langle\tilde{\omega}^i,\nabla_j\bar{V}_i\rangle \\ \therefore\ \tilde{\omega}^i_{;j} &= -\Gamma^i_{kj}\tilde{\omega}^k\end{aligned}$$

が得られます。これを用いて

$$\begin{aligned}\nabla_j\tilde{\omega} &= \nabla_j(\omega_i\tilde{\omega}^i) \\ &= (\nabla_j\omega_i)\tilde{\omega}^i - \omega_i(\nabla_j\tilde{\omega}^i) \\ &= (\omega_{i,j} - \Gamma^k_{ij}\omega_k)\tilde{\omega}^i \\ \therefore\ (\nabla_j\tilde{\omega})_i &= \omega_{i,j} - \Gamma^k_{ij}\omega_k\end{aligned}$$

が得られます。ベクトルのときと接続係数の符号だけが変わっています。

これまでに出てきた微分の成分表示を以下にまとめておきましょう。

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{V}\right)^i &= U^jV^i_{,j} - V^jU^i_{,j} \\ (\mathscr{L}_{\bar{U}}\tilde{\omega})_i &= U^i\omega_{j,i} + \omega_jU^j_{,i} \\ (\nabla_j\bar{M})^i = M^i_{;j} &= M^i_{,j} + \Gamma^i_{kj}M^k \\ (\nabla_j\tilde{\omega})_i = \omega_{i;j} &= \omega_{i,j} - \Gamma^k_{ij}\omega_k\end{aligned}$$

## 3.3 測地線方程式

$\bar{V}$ の $\bar{U}$ 方向の平行移動として定義されたのが $\nabla_{\bar{U}}\bar{V}$ だったわけですが、この $\bar{V}$ として $\bar{U}$ 自身を取ったときの共変微分が常に 0 であるような曲線はどのようなものでしょうか。この曲線は、あるベクトルが与えられたとき、それを自身の向く方向に平行移動し続けて描くことができます。このような曲線を**測地線**といいます。

一般に、曲線 $\mathfrak{A}$ 上の任意の点の接ベクトル $\bar{U}$ について、

$$\nabla_{\bar{U}}\bar{U} = 0$$

が成り立つとき、曲線 $\mathfrak{A}$ は測地線である、と定義されます。そこで、曲線 $\mathfrak{A}$ を $\lambda$ でパラメトライズし局所座標で表示してみます。

定義より、

$$\begin{aligned}0 = (\nabla_{\bar{U}}\bar{U})^i &= U^jU^i_{;j} \\ &= U^j(U^i_{,j} + \Gamma^i_{kj}U^k) \\ &= \frac{dU^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kj}U^jU^k \\ &= \frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{kj}\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}\end{aligned}$$

となり、一般相対論などでお馴染みの**測地線方程式**

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{kj}\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda} = 0$$

が得られました。このときに用いた測地線のパラメーターを一般に、**Affine パラメーター**と呼びます。多様体に Riemann 計量を入れると、2 点間を最短経路で結ぶ曲線は測地線であることが一般に言えます。

## 3.4 接続係数と Christoffel 記号

接続係数 $\Gamma^k_{ij}$ について、もう少しだけ考えてみます。$\nabla_j \bar{e}_i = \Gamma^k_{ij}\bar{e}_k$ より、

$$\Gamma^k_{ij} = \langle \tilde{\omega}^k, \nabla_{\bar{e}_j}\bar{e}_i \rangle$$

と書けるので、添字 $k$、$j$ がテンソルの添え字になっていることが分かります。しかし、添字 $i$ は、共変微分の定義 [3] を考えればテンソルの添字ではないので、接続係数はテンソルではありません。実際、座標変換

$$x^i \longmapsto x^{i'} = \Lambda^{i'}_j x^j$$

に対して、

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{ij} = \langle \tilde{\omega}^k, \nabla_{\bar{e}_j}\bar{e}_i \rangle \longmapsto \Gamma^{k'}_{i'j'} &= \langle \Lambda^{k'}_m \tilde{\omega}^m, \Lambda^n_{j'} \nabla_{\bar{e}_n}(\Lambda^l_{i'}\bar{e}_l) \rangle \\
&= \Lambda^{k'}_m \Lambda^n_{j'} \langle \tilde{\omega}^m, (\Lambda^l_{i';n'}\bar{e}_l + \Lambda^l_{i'}\Gamma^q_{ln}\bar{e}_q) \rangle \\
&= \Lambda^{k'}_m \Lambda^n_{j'} (\Lambda^l_{i';n'}\delta^m_l + \Lambda^l_{i'}\Gamma^q_{ln}\delta^m_q) \\
&= \Lambda^{k'}_m \Lambda^n_{j'} \Lambda^m_{i';n'} + \Lambda^{k'}_m \Lambda^n_{j'} \Lambda^l_{i'} \Gamma^m_{ln}
\end{aligned}$$

と変換し、余分な第 1 項が出てくることが見てとれます。したがって接続係数はテンソルではないのですが、共変微分

$$(\nabla_j \bar{M})^i = M^i_{;j} = M^i_{,j} + \Gamma^i_{kj} M^k$$

は余計な項が打ち消すことにより、$i$、$j$ の 2 つの添字をもつテンソルとしてふるまいます。[*8]

続いて、添字の対称性について考えてみます。接続係数を 2 つの下付き添字についての対称成分と反対称成分に分けると、

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\right) \\
&\equiv \Gamma^k_{(S)\ ij} + \frac{1}{2} T^k_{ij}
\end{aligned}$$

とできます。ここで導入した $T^k_{ij}$ は**捩率**[*9]**テンソル**と呼ばれ、一般相対論の言葉を使えば時空の“ねじれ”を表すテンソルです。

前節で導いた測地線方程式の左辺第 2 項に代入すると、測地線方程式に寄与するのは $\Gamma^k_{ij}$ の、$i \leftrightarrow j$ の入れ替えについて対称な成分 $\Gamma^k_{(S)\ ij}$ だけであることが分かります（反対称成分は消えますね）。一般相対論では、$i \leftrightarrow j$ の入れ替えについての対称性をもった接続係数、すなわち、捩率テンソルがゼロであるような接続をもった時空をもっぱら扱います。

そこで、接続係数 $\Gamma^k_{ij}$ のうち、$i \leftrightarrow j$ の入れ替えについて対称なものを特に、**Christoffel 記号**といいます。この添字の対称性は、多様体に Riemann 計量を入れ、「局所的な慣性座標系がいつでも取れる」という物理的な要請を課すと従うものです。

---

[*8] 座標変換に対して形を変えない形式を**共変形式**と言いますが、「共変微分」の名前はこれが由来です (cf. [4])。決して共変ベクトルを微分しているから、という意味ではありません。実際、反変微分は多分ありません。

[*9] 初見で読める人マジで 0 人説ですが、「れいりつ」と読みます。

蛇足ですが、下付き添字について対称な接続係数の嬉しいところとして、テンソルの Lie 微分で余分な項が打ち消して

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{L}_{\bar{U}}\bar{V}\right)^i &= U^j V^i_{,j} - V^j U^i_{,j} \\ &= U^j V^i_{;j} - V^j U^i_{;j}\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_{\bar{U}}\tilde{\omega})_i &= U^i \omega_{j,i} + \omega_j U^j_{,i} \\ &= U^i \omega_{j;i} + \omega_j U^j_{;i}\end{aligned}$$

が成り立つという点があります。コロンをセミコロンにおき替えても成り立つという同様の関係式は、高階のテンソルについても成り立ちます。これを利用して、Lie 微分と共変微分を行ったり来たりできるのがひとつ実用面で便利なところでしょうか。

ここまで接続係数の性質を述べてきましたが、実は多様体に Riemann 計量を導入すると、Christoffel 記号は Riemann 計量から一意に定まってしまうということが導けます。このような接続を、**計量接続**といいます。さらに、共変微分の交換子を利用して時空の曲率を表す **Riemann テンソル**を定義することができるのですが、これに触れると際限なく書き続けてしまう気がするので、それはまたの機会にします。

## 3.5 標準座標

Christoffel 記号が定まっている可微分多様体 $\mathcal{M}$ を考えます。

ある点 $P$ での局所座標をうまくとって、その座標についての Christoffel 記号の全成分が $P$ で局所的に 0 になるようにできないか、という問いを考えてみましょう。Christoffel 記号がテンソルならば、ある座標で 0 なら座標変換しても 0 ですから、自明な零テンソルというあまり面白くない場合しかありえないことになってしまいます。しかし、幸いテンソルでないことは前節で示しているので、なんだか試行錯誤したら作れそうな気がします（？）これは、$P$ を通る測地線を利用すれば実際に可能です。

$P$ を通る測地線 $\mathfrak{A}$ について、$P$ での接ベクトルを $\bar{U}(P)$ とします。接空間の適当な基底 $\{\bar{e}_i\}$ を取り、それで展開した $\bar{U}(P)$ の成分を $U^i(P)$ とします。任意の $P$ の接ベクトルは $P$ を通る測地線を一意的に定義する[*10]、ということに注意すると、接ベクトルに対し、それが生成する測地線に沿って $P$ からパラメーター $\Delta\lambda = 1$ だけずれた点を対応させることができます。この対応は、測地線が交わらないような $P$ のある近傍 $O$ をとってくると、単射にすることができます。

この対応を利用すれば、$P$ の接空間の任意の基底を選ぶことで、近傍 $O$ の点 $Q$ の座標を接ベクトルの成分として定義することができそうです。このようにして定まる $P$ の局所座標は、**標準座標**と呼ばれます。

接ベクトル $\bar{U}$ が定義する測地線に沿った点の座標は、

$$x^i = U^i(P)$$

です。よって、この曲線に沿った Affine パラメーターが $\lambda$ である点の座標は、

$$x^i = \lambda \bar{U}^i(P)$$

[*10] パラメーターまで含めて“曲線”ですから、$\bar{U}(P)$ に対しパラメーターも込めて一意に定まります。実際、接空間で平行な 2 つの接ベクトルは、パラメーターだけ異なる測地線を定めます。

となることが分かります ($P$ を $\lambda = 0$ の点とします)。このような座標を取れば、測地線方程式

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{kj}\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda} = 0$$

に代入して、結局、

$$\Gamma^i_{kj}(P) = 0$$

であると分かります。すなわち、標準座標は、$P$ で局所的に Christoffel 記号をゼロにするような座標であることが分かります。当然、$P$ で Christoffel 記号がゼロであったとしても、それ以外の点では必ずしも 0 ではありません。

## 4 おわりに

関数の Lie 微分は流体力学とかで出てきますね。定常流れ場でのスカラー量のラグランジュ微分が、流跡線に沿った Lie 微分に対応します。ベクトルの Lie 微分は、いわば「定常流れ場に針を浮かべたときの針の向きの変化」とかでしょうか？流体中に 2 つ以上のベクトル場が同時に登場することってあまりないような気がしますね。ちょっと対応物が見当たりません。

さらに、古典力学を多様体上で定式化する[*11]と、正準方程式の解は、$2n$ 次元位相空間[*12]の体積 $2n$ 形式 $\tilde{\omega} = \tilde{d}q_1 \wedge ... \wedge \tilde{d}q_n \wedge \tilde{d}p_1 \wedge ... \wedge \tilde{d}p_n$ の Lie 微分を 0 にするような位相空間内の曲線として得られます。このようなベクトル場は Hamiltonian ベクトル場と呼ばれ、この積分曲線に沿った Hamiltonian の Lie 微分は 0、すなわち系のエネルギーが保存することも同様に導けます。

一方で共変微分の方は、一般相対論・ゲージ理論などなどいたるところで登場します。このへんの話は目下勉強中なので、今は自信をもって言えることがありません。中期的な目標としては、相対論での共変微分とゲージ理論での共変微分って、結局同じことじゃないか！というお気持ちを理解したいです。なんかファイバー束の切断がうんたらかんたら..... 先は長そうです。

あと TEX 打ちってあほみたいに時間がかかりますね。みんなすごいですね。早く慣れたいものです。

## 5 参考文献


[1] Bernard Schutz, "Geometrical methods of mathematical physics"

[2] Bernard Schutz, "A first course in general relativity"

[3] 佐古彰史, "ゲージ理論・一般相対論のための微分幾何入門"

[4] EMAN の物理学 – 共変微分, https://eman-physics.net/relativity/co_dif.html


[*11] 朝倉解析力学は半分読んで積読してます。

[*12] phase space である。