

ノート：自然さ、くりこみ群、フェルミ液体

Yuto Nakajima (nakaj021@umn.edu)

2026年4月28日

目次

1	はじめに	1
2	低エネルギー有効理論としての場の量子論	2
2.1	場の量子論の定義としてのカットオフ	2
2.2	ウィルソンのくりこみ群と次元解析	3
2.3	「無限大の除去」の処方との関係	6
2.4	補足：スケーリング則と演算子のレレバンス	8
2.5	オーダーの原則	8
2.6	自然さ (naturalness) の原則とファイン・チューニング	9
3	フェルミ液体のランダウ理論とくりこみ群	11
3.1	はじめに：フェルミ液体	11
3.2	フェルミ面上のスケーリング則	12
3.3	演算子のレレバンス	13
3.4	フォノンの寄与	13
3.5	運動量デルタ関数とミグダルの定理	15
3.6	マージナルな相互作用と高温超伝導	16
3.7	高温超伝導との関係	18
	参考文献	19

1 はじめに

導体中の電子は、互いに強いクーロン相互作用をしながら運動する、希薄とは限らないフェルミオン系である。このエネルギースケールを Λ とすると、 Λ における理論を解くことは簡単ではない。

しかし、驚くべきことに、相互作用をくりこむと電子の系は自由なフェルミオンの気体として扱うことができることが知られている。励起を特徴づけるフェルミオンは電子と同じ量子数（スピン、電荷など）を持つが、相互作用の効果を「衣」としてまとった準粒子であると言える。この準粒子はもはや強い相互作用を感じず、したがって理論を解くことができる。これがいわゆるランダウ (Landau) のフェルミ液体論であり、導体中の電子をほとんど自由なフェルミオンとして扱う超伝導の BCS 理論や、その強結合領域への拡張である Eliashberg 理論を正当化するものでもある。

ランダウのフェルミ液体論は、フェルミ面上のくりこみ群の言葉で再定式化することができる。本ノートでは、これを初めて導入した Polchinski-Schaker の議論 [Polchinski, 1992; Shankar, 1994] に基づいて、このス

トリーを紹介する。

2 低エネルギー有効理論としての場の量子論

同じ系の高エネルギー側と低エネルギー側が異なる描像で記述されているとき、これらがどう橋渡しされているかを考えることは重要である。場の量子論におけるくりこみ (renormalization) は、そのキーワードとなる。具体的な系に立ち入る前に、本章では、現代的な場の量子論の枠組みでエネルギースケールの階層性やくりこみの操作がどう理解されているかを紹介する。

2.1 場の量子論の定義としてのカットオフ

一般的な設定として、系の典型的なエネルギースケールを Λ とし、それよりも十分小さいエネルギースケール $E \ll \Lambda$ での物理を D 次元の理論 $S_\Lambda[\varphi]$ で記述することを考える。 φ は何らかの場であり、

$$\varphi(x) = \int_{|p| \leq \Lambda} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \varphi_p \quad (2.1)$$

のように Λ 以下のエネルギーのモードだけを含んでいるとする^{*1}。

たとえば、格子系では格子定数 a に対して典型的なエネルギースケールは $\Lambda \simeq 1/a$ である。また、電弱相互作用を記述する Weinberg-Salam 理論では、弱い相互作用を媒介するゲージボソンの質量 $M_W \sim 80 \text{ GeV}$ を用いて $\Lambda \simeq M_W$ とできる。次の章ではクーロン相互作用をする電子の系を扱うので、電子の質量 m に対して $\Lambda \simeq m$ 程度が典型的である。このような Λ より低いエネルギースケールでは、系は理論 $S_\Lambda[\varphi]$ で記述されると設定する^{*2}。

Λ よりも高いエネルギースケールでは、より重い粒子が出現するかもしれないし、大きな対称性が回復するかもしれない。そしてこれによってスペクトラムの構造が変わり、異なる量子数の励起が現れるかもしれない。あるいは、格子系の例からも分かるように、もはや場の量子論ですらない枠組みで記述されるかもしれない。

重要なことは、 Λ 以上のエネルギースケールでは、何が起こるか分からないし、分からなくても構わないということである。このことは、理論 $S_\Lambda[\varphi]$ による物理の記述が破綻するエネルギースケールが Λ で与えられる、とも言い換えられる。「破綻する」の具体的な意味は後述するが、どんな場の量子論も、このようなエネルギースケール Λ を備えている。このエネルギースケール Λ を、以下では**カットオフ**と呼ぶことにする。

カットオフより上の物理は、単に無視してしまっているのではなく、 $S_\Lambda[\varphi]$ の結合定数 $\{g_i\}$ の中に有効的にくりこまれている。したがって、結合定数 $\{g_i\}$ は設定するカットオフ Λ によって変わり、以下ではこれをあらわに表示するために $\{g_i(\Lambda)\}$ と書く。

歴史的には、カットオフ Λ は、単に運動量積分を収束させるための人工的な処方

$$\int_E^\infty \frac{dk}{k} \longrightarrow \int_E^\Lambda \frac{dk}{k} \quad (2.2)$$

と考えられたこともあった [Polchinski, 1984]。

伝統的には、運動量カットオフ (Pauli-Villars 正則化) の導入は以下のように説明される。場の量子論でループ積分などを含む過程を考えると、計算結果に無限大が含まれることがある。典型的には、何らかの素過程の確率のような量が

$$\lambda(E) = \left(\frac{1}{g^2} - \int_E^\infty \frac{dk}{k} \right)^{-1} \quad (2.3)$$

^{*1} Lorentz 計量は不定なので $|p| \leq \Lambda$ がうまく定義できないが、代わりに、Wick 回転して Euclidean 計量で $|p| \leq \Lambda$ を考え、再び Wick 回転して Lorentz 計量に戻ってきたと考えると議論を進める。

^{*2} もちろん、複数の典型的なエネルギースケールを持つような系を考えることもできる。以下で考えるフェルミ液体は、その例になっている。

のように与えられる。明らかに、この結果は無限大を含んでいる。しかし、仮に無限大を含んでいても、形式的にカットオフ Λ を決めると、インプットとなる実験結果

$$\lambda(E_1) = \lambda_{\text{input}} \quad (2.4)$$

を再現するように理論の結合定数 g^2 を（ふたたびカットオフを含んだ形で）

$$\lambda_{\text{input}} = \left(\frac{1}{g^2} - \int_{E_1}^{\Lambda} \frac{dk}{k} \right)^{-1} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{g^2} = \frac{1}{\lambda_{\text{input}}} + \ln \left(\frac{\Lambda}{E_1} \right) \quad (2.5)$$

と決めることができる。こうして決めた（カットオフを含む）結合定数 g^2 を用いて計算結果を表示すると、これは（無限大同士が相殺して！）有限の値

$$\lambda(E) = \left(\frac{1}{\lambda_{\text{input}}} - \int_E^{E_1} \frac{dk}{k} \right)^{-1} \quad (2.6)$$

になっている。したがって、物理的な可観測量は Λ に依存せず、他の実験結果に対する予言能力が保証される。実際、このような方法によって場の量子論は多くの成功を収めてきた。いわゆる、朝永の時代のくりこみの処方である。この立場では、 Λ は議論の最後に無限大に送られるべき量であり、計算テクニック以上の物理的な意味はない。

このように、無限大を結合定数に含めることができるような理論をくりこみ可能な理論と呼び、そうでない理論をくりこみ不可能な理論と呼んだ。しかし、朝永の時代のくりこみの処方は、「どんな場合にくりこみが可能か？」を判定することはできても、「自然界に現れる理論はなぜくりこみ可能なのか？」という問いには答えられなかった。特に、量子電磁力学（QED）がくりこみ可能な理論であったことは幸運な（後述するように、あるいは不幸な）偶然であると考えざるを得なかった。

ここに、現代的なくりこみの理解との大きな違いがある。現代的な理解では、 Λ の存在は場の量子論の定義に含まれている。つまり、

場の量子論は、本質的にカットオフ Λ を備えた低エネルギー有効理論である

というのが基本的な姿勢である。以下で議論するように、カットオフスケールにおける対称性からの制約と、いくつかの基本的な仮定をおくことによって、自然界に現れる理論がくりこみ可能である理由が説明できる。

2.2 ウィルソンのくりこみ群と次元解析

議論を具体的にするために、ウィルソン（Wilson）流のくりこみ群 [Wilson, 1974] を用いて考えてみよう。

カットオフ Λ を備えた理論 S_Λ に対して、それよりも低いエネルギースケール $\Lambda_1 (< \Lambda)$ にカットオフを移動させることを考える。このときに得られる新たな理論 S_{Λ_1} は、 $\Lambda_1 < \omega < \Lambda$ のエネルギーをもつモードだけ積分して

$$\int \mathcal{D}\varphi_{>} \mathcal{D}\varphi_{<} e^{iS_\Lambda[\varphi_{>}, \varphi_{<}] } = \int \mathcal{D}\varphi_{<} e^{iS_{\Lambda_1}[\varphi_{<}] } \quad (2.7)$$

で与えられる。ここに、 $\varphi_{>}$ ($\varphi_{<}$) は $\Lambda_1 < \omega < \Lambda$ ($\omega < \Lambda_1$) のエネルギーに対応するモードである。(2.7) では

$$\varphi(x) = \int_{\Lambda_1 \leq |p| \leq \Lambda} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \varphi_p + \int_{|p| \leq \Lambda_1} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \varphi_p \equiv \varphi_{>}(x) + \varphi_{<}(x) \quad (2.8)$$

のように場を分解し、そのうち前者だけを積分した*3。

*3 このとき、具体的にこの積分をどう実行するか（分解した場が特異性を含まないか、対称性が保たれるか、など）はここでは踏み込まない。あるいは、踏み込まなくてもここでの一般的な議論は十分可能である。

ここで、理論 $S_\Lambda[\phi]$ に対して、**1 粒子既約 (1PI) 有効作用**

$$\Gamma_\Lambda[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^D x_1 \cdots d^D x_n \Gamma_\Lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \quad (2.9)$$

を定義しておくると便利である。これは連結 Green 関数の生成汎関数 $-\ln Z_\Lambda[J]$ を Legendre 変換

$$\Gamma_\Lambda[\phi] = -i \ln Z_\Lambda[J] - \int d^D x J(x) \phi(x) \quad (2.10)$$

したもので、 $\Gamma_\Lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ はカットオフ Λ つきの 1 粒子既約 n 点頂点関数である。 $\Gamma_\Lambda[\phi]$ を用いると、もとの理論の量子ゆらぎをすべて取り入れた効果を古典的な作用の形式で扱うことができる。以下では、これを $\Gamma_\Lambda[S_\Lambda]$ のように書くことにしよう。

このとき、高エネルギーモードの積分 (2.7) は

$$\Gamma_\Lambda[S_\Lambda] = \Gamma_{\Lambda_1}[S_{\Lambda_1}] \quad (2.11)$$

と表すことができる。期待されるように、エネルギースケール $E \ll \Lambda$ の過程 (典型的には散乱) に対する計算結果は、 $\Gamma_\Lambda[S_\Lambda], \Gamma_{\Lambda_1}[S_{\Lambda_1}]$ のいずれかで計算しても一致する。また、 E をちょうどカットオフに持つ理論 $S_{\Lambda=E}$ で同様の過程を計算すると、カットオフと散乱エネルギースケールの差に由来する $\ln(E/\Lambda)$ のような大きな因子が消えるので、

$$\Gamma_\Lambda[S_\Lambda] \Big|_{\Lambda=E} \simeq S_{\Lambda=E} \quad (2.12)$$

と近似できる。したがって、エネルギースケール $E \ll \Lambda$ の散乱過程は、 S_Λ を用いてループ積分を評価して計算してもよいし、あるいは量子効果をすべて取り入れた $S_{\Lambda=E}$ を用いて tree-level で計算しても同じ結果を与える。

このことを踏まえて、理論 S_Λ を

$$S_\Lambda = \int d^D x \sum_i g_i(\Lambda) \mathcal{O}_i \quad (2.13)$$

のように局所演算子 $\{\mathcal{O}_i\}$ の和^{*4}に展開し、各結合定数のエネルギー依存性がどのように与えられるかを考えてみよう。(2.13) は一般に、無限個の項を含む和である。

作用 S_Λ は無次元量なので、演算子 \mathcal{O}_i の質量次元を $[\mathcal{O}_i] = \delta_i$ としたとき、結合定数 $g_i(\Lambda)$ の質量次元は

$$[g_i] = D - \delta_i \quad (2.14)$$

となる。そこで、無次元の結合定数 $\{\lambda_i(\Lambda)\}$ を

$$g_i(\Lambda) = \lambda_i(\Lambda) \Lambda^{D-\delta_i} \quad (2.15)$$

によって定義しよう。あとで詳述するように、ここでは各 $\lambda_i(\Lambda)$ がオーダー $\mathcal{O}(1)$ 程度の大きさを持つと仮定する。

したがって、 S_Λ を用いて $E \ll \Lambda$ での散乱過程を計算すると、各項の寄与はおおむね

$$\int d^D x g_i(\Lambda) \mathcal{O}_i \sim g_i(\Lambda) E^{\delta_i-D} = \lambda_i(\Lambda) \left(\frac{E}{\Lambda}\right)^{\delta_i-D} \quad (2.16)$$

程度の大きさを持つと見積もることができる。ここでの「エネルギー」は自然単位系での「エネルギー」なので、たとえば相互作用の到達距離 Δr に対して $E \sim 1/\Delta r$ などと思ってよい。重要なことは、各過程は次元を持った量で特徴づけられ、そういう量は E のほかに存在しない、という点である。

*4 理論が定義されるエネルギースケール Λ より上では、一般に $\Delta t \sim 1/\Lambda$ 程度の非局所な相互作用を含んでしまう。「局所」演算子での展開 (2.13) が可能なのは、それぞれの場が Λ 以下の周波数のモードしか含んでいないためである。

一方、 $S_{\Lambda=E}$ を用いて同じ計算をすると、各項の寄与はおおむね

$$\int d^D x g_i(E) \mathcal{O}_i \sim g_i(E) E^{\delta_i - D} = \lambda_i(E) \quad (2.17)$$

であると見積もれる。

仮に、 \mathcal{O}_i がスカラー場 ϕ の n 体相互作用のような項だとすると、 ϕ の n 体散乱振幅は結合定数 $g_i(\Lambda)$ を tree-level 近似とし、そこから量子補正を摂動的に取り入れることで与えられる。したがって、それぞれの理論における上での見積もりから、おおむね

$$\lambda_i(E) \sim \lambda_i(\Lambda) \left(\frac{E}{\Lambda} \right)^{\delta_i - D} + \dots \quad (2.18)$$

という関係が導ける。… の項は量子補正からの寄与である。

各 $\lambda_i(\Lambda)$ のオーダーは $\mathcal{O}(1)$ なので、エネルギー $E \ll \Lambda$ での散乱過程への S_Λ の各項の寄与は、 $(\delta_i - D)$ の正負によって大きく変わる。 $\delta_i - D < 0$ のときには、散乱過程が低エネルギーになればなるほど (2.16) の項は大きくなり (あるいは、有効的な結合定数 (2.18) が大きくなり)、その寄与が重要になる。一方、 $\delta_i - D > 0$ のとき (2.16) の項 (あるいは、有効的な結合定数 (2.18)) の寄与は非常に小さくなり、散乱過程においては重要でなくなる。 $\delta_i - D = 0$ のときには、どんなエネルギー E の過程でも等しく重要である。

これらの演算子 \mathcal{O}_i をそれぞれ、(自由な固定点のまわりで) **レレバント (relevant)**、**イレレバント (irrelevant)**、**マージナル (marginal)** であるという。あるいは、通常のくりこみ理論の用語では、それぞれの相互作用は、**超くりこみ可能 (super-renormalizable)**、**くりこみ不可能 (non-renormalizable)**、**くりこみ可能 (renormalizable)** であると呼ぶ。

δ_i	低エネルギーでのふるまい	演算子	相互作用
$< D$	増大	レレバント	超くりこみ可能
$= D$	不変	マージナル	くりこみ可能
$> D$	減少	イレレバント	くりこみ不可能

低エネルギー $E \ll \Lambda$ での散乱過程に効いてくるのはレレバントまたはマージナルな演算子のみで、それ以外の演算子は重要でない。多くの場合、レレバントまたはマージナルな演算子は有限個しかないので、低エネルギーの物理はこれらの有限個のパラメータだけで決まってしまう。

このような視点から見れば、場の量子論におけるくりこみは、(朝永の時代に考えられていたような) 無限大を除去するための場当たりの手続きではないことが分かる。くりこみは明快な物理的な意味を持ち、

**低エネルギー (長距離) の物理は、レレバントまたはマージナルな相互作用を通じてのみ、
高エネルギー (短距離) の詳細に依存する。イレレバントな相互作用の効果は、カットオフ Λ に
近づく (より短距離の物理を観測する) と現れる**

という事実に集約される。

QED をはじめとした自然界に現れる理論がくりこみ可能である理由は、この立場からは **自明** である。すなわち、対称性から許される無数のパラメータのうち、レレバントまたはマージナルな相互作用にあたるパラメータだけが低エネルギーの物理に影響できる。逆に言えば、イレレバントな (くりこみ不可能な) 相互作用は、低エネルギーの物理には現れない (これは摂動論の範囲で示せる [Wilson, 1971])。カットオフスケール Λ がはるか上空にあると考える以上、QED のような低エネルギーの物理は、自動的にくりこみ可能な理論になってしまうのである *5

*5 したがって、現代的な場の量子論として問題にすべきことは、「高エネルギー側の物理のうち、(摂動的または非摂動的に) どんなものが低エネルギー側に影響を与えるか?」という問いだと言える。

対称性からラグランジアンを制限する伝統的な場の量子論の教科書では、制約の一つとして「くりこみ不可能な相互作用はあってはならない」という条件が課されるが、より現代的には、くりこみ不可能な相互作用は「あってはならない」わけではない。ここでの「くりこみ不可能な相互作用はあってはならない」というのは、「興味のあるエネルギースケール E に対して、カットオフ Λ が、くりこみ不可能な相互作用が無視できるほど高エネルギー側にあるとみなす」という仮定にはかならない。

2.3 「無限大の除去」の処方との関係

上での議論で、レバントまたはマージナルな演算子だけが低エネルギーでの散乱過程に寄与することを見てきた。しかし、より正確には、(2.16)での議論は素朴な次元解析だけに基づくもので、イレバントな演算子が低エネルギーで本当に寄与しないかという点はやや微妙である。

散乱過程へのイレバントな演算子の寄与は、(2.16)のようにカットオフ Λ の負べきの形をしている。したがって、たとえば紫外発散するループダイアグラムにこの相互作用が含まれていると、ダイアグラムの発散 (Λ の正べき) の寄与と打ち消して有限の寄与をするのではないか、という可能性が考えられる。もしイレバントな演算子からの寄与が発散と打ち消して有限になりうるとすると、イレバントな相互作用は低エネルギーでももはや無視できないことになる。

しかし、この問いに対しては、

どんな Λ の非負のべきでの発散も、レバントまたはマージナルな演算子からの寄与と同じ形をしている

という鮮やかな回答が知られており、これによって解決される。つまり、イレバントな演算子を含んだダイアグラムからのどんな寄与も、レバントまたはマージナルな結合定数の再規格化で打ち消すことができる。端的に言えば、素朴な次元解析の結果が、量子補正まで含めても（ある領域で）厳密に正しいものとして援用してよいということである。

量子補正からの発散をレバントまたはマージナルな結合定数の再規格化で打ち消すことができる、というのは伝統的なくりこみ可能性の議論そのものである。したがって、このことは、「もし量子補正（ループ積分）から有限の寄与があれば、それはレバントまたはマージナルな演算子への量子補正 (2.18) としてのみ現れる（イレバントな演算子への量子補正には現れない）」と言い換えることができる。

通常の場合の量子論の教科書では、この証明は、ダイアグラムの複雑な組み合わせで技巧的に行われることが多いが、実はより簡潔で直観的な証明が [Polchinski, 1984] の中で与えられている。

以下ではこの証明の概略を紹介しよう。

まず、(2.7)を微小なカットオフの変化 $\Lambda \rightarrow \Lambda - d\Lambda \rightarrow \Lambda - 2d\Lambda$ などに対して順々に行い、各ステップでの作用の変化分を $dS_\Lambda = \mathcal{F}[S_\Lambda]d\Lambda$ とする。 $\mathcal{F}[S_\Lambda]$ は一般に S_Λ の汎関数で、

$$\frac{\partial S_\Lambda}{\partial \Lambda} = \mathcal{F}[S_\Lambda] \quad (2.19)$$

のように書くことができる。この汎関数の具体形には踏み込まないが、(2.19)はいわゆるポルチンスキー (Polchinski) 方程式と呼ばれているもので、今日では汎関数くりこみ群などの文脈で議論される。

さて、(2.13)や(2.15)などを使って汎関数 $\mathcal{F}[S_\Lambda]$ を自由な固定点 ($\{g_i = 0\}$) の周りで展開すると、主要な寄与は

$$\mathcal{F}[S_\Lambda] \simeq \int d^D x \sum_i (D - \delta_i) \lambda_i(\Lambda) \Lambda^{D - \delta_i - 1} \mathcal{O}_i + \dots \quad (2.20)$$

のようになる。すなわち、イレバントな演算子は、1次の係数が負の寄与に対応する。

一方、 $\mathcal{F}[S_\Lambda]$ はもともと $\Lambda - d\Lambda < \omega < \Lambda$ のエネルギーのモードの積分によって得たので（積分の上端と下端両方が有限なので）、結合定数 $\{\lambda_i(\Lambda)\}$ は特異性をもたないなめらかな関数である。

したがって、自由な固定点においてイレバントな演算子は、固定点の周りの十分小さい領域では、常にイレバントである（他の固定点に影響されない）。言い換えれば、素朴な次元解析でイレバントと判定された演算子は、自由な固定点に十分近い領域で議論する限りは、量子補正を取り入れてもまたイレバントである。

すなわち、イレバントな演算子に対する量子補正からの寄与 (2.18) は、もとの結合定数を小さくする方向にしか寄与しない。言い換えれば、もし量子補正（紫外発散を含むループ積分など）から有限の寄与があったときには、それは必ず、(2.18) においてレバントまたはマージナルな結合定数への寄与として現れる。イレバントな演算子に加わる量子補正は、たかだかカットオフの負べきである。（証明の概略おわり）

以上の議論はやや漠然としているが、概略としてはおおむねこのような証明である。

この観点からは、伝統的なくりこみ可能な理論についての主張（「ループ積分で生じる発散は、すべてくりこみ可能な相互作用の結合定数に押し付けられる」）は、

Λ の非負のべきでの量子補正は、（固定点に十分近い領域で）
レバントまたはマージナルな相互作用にのみ現れる

という主張にほかならない。これによって伝統的なくりこみ理論が現代的な枠組みで理解できた。

もちろん、固定点によりも十分遠い（強結合な）領域ではこの議論は成り立たない。非自明な固定点が見れると、自由な固定点周りでイレバントだった演算子がレバントになる、ということも起こりうる。（4- ϵ ）次元ボゾンの理論でのウィルソン・フィッシャー（Wilson-Fisher）固定点や、朝永・ラッティンジャー（Luttinger）流体^{*6}はその有名な例である。

また、マージナルな相互作用に対しては、量子補正が非常に重要である。まずは、(2.18) の E 微分

$$\beta(\lambda_i) \equiv E \frac{\partial \lambda_i}{\partial E} = (\delta_i - D)\lambda_i(E) + b\lambda_i(E)^2 + \mathcal{O}(\lambda_i(E)^3) \quad (2.21)$$

を考えよう。右辺の1次項の正負は、次元解析での素朴なスケールングを表している。無次元化された結合定数 λ_i に対して定義される (2.21) は、**ベータ関数 (beta function)** と呼ばれる^{*7}。

相互作用がマージナルなときには、高次の b の正負によって高次でレバント（マージナリ・レバント (marginally relevant)）か高次でイレバント（マージナリ・イレバント (marginally irrelevant)）かに分かれる。高次の補正を取り入れてもマージナルな演算子は、**エグザクトリ・マージナル (exactly marginal)** と呼ばれる^{*8}。

例として、マージナリ・レバント（ $\delta_i = D$ かつ $b < 0$ ）な場合を考えよう。(2.21) を解くとただちに分かるように、

$$\lambda_i(E) = \frac{\lambda_i(\Lambda)}{1 + b \lambda_i(\Lambda) \ln(\Lambda/E)} \quad (2.22)$$

となって、 $E \simeq \Lambda e^{1/b \lambda_i(\Lambda)}$ で発散する。

このことが物理的に何を意味するかは、個別の系によって異なる。たとえば、QCD の結合定数はマージナリ・レバントであり、発散するエネルギースケールでは閉じ込め転移とカイラル対称性の破れが起こる。また、超対称性のある系では、超対称性の自発的破れがマージナリ・レバントな結合定数の発散する点として理解できることがある。さらに、あとの章では、高温超伝導を議論する際に、結合定数の発散が物理的に重要になる物性理論の例を紹介する。

^{*6} 素粒子理論の言葉づかいでは、シリリング (Thirring) 模型と呼ばれる。

^{*7} 素粒子理論と物性理論で、ベータ関数の符号の規約が違うことがあるので注意が必要である。

^{*8} たとえば、4次元 Yang-Mills 理論や2次元非線形シグマ模型の運動項はマージナリ・レバント、4次元 ϕ^4 模型の質量項や4次元 U(1) ゲージ理論の運動項はマージナリ・イレバントである。また、4次元 Yang-Mills 理論の θ 項や2次元コンパクトボゾンの運動項はエグザクトリ・マージナルの例である。

2.4 補足：スケールリング則と演算子のレレバンス

以下の議論で便利になるように、演算子のレレバンスの決め方について補足しておこう。
原則として、どの演算子をレレバンスの基準に取るかは自由である。たとえば、

$$S_\Lambda = \int d^D x \left(\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4 \right) \quad (2.23)$$

のような理論があったとき、運動項がマージナルだとみなして

$$[\partial_0 \phi^2] = D \quad \text{より} \quad [\phi] = \frac{2-D}{2} \quad (2.24)$$

としてもよいし、あるいは4点相互作用の結合定数が無次元になるように $\phi' = \lambda^{1/4} \phi$ と再規格化して、

$$[\phi'^4] = -D \quad \text{より} \quad [\phi'] = -\frac{D}{4} \quad (2.25)$$

としてもよい。この選択は、どの固定点の周りでくりこみ群を議論するかという選択に対応している。つまり、ある固定点で演算子 \mathcal{O}_i がもっとも卓越するならば、 \mathcal{O}_i を基準に他の演算子のふるまいを議論するのが便利なので、 \mathcal{O}_i の係数が無次元になるように再規格化する、という方針である。

スケールリング則は、もっとも卓越する項がマージナルになるように決める

特に、弱結合が仮定できるような固定点の周りで議論するときには、運動項がマージナルになるようにスケールリング則を決める。したがって、(2.23) の理論の場合、微分と ϕ をそれぞれ N, M 個ずつ含むような演算子 \mathcal{O}_i の次元は

$$\delta_i = M \frac{2-D}{2} + N \quad (2.26)$$

となる。

このことは、スケールリング則が必ずしも次元解析の結果と一致しない（以下で見るフェルミ面を含むような場合にも拡張できるので、次元解析によらない言い方を紹介しておこう。エネルギースケール E を

$$E \longrightarrow sE \quad (0 < s < 1) \quad (2.27)$$

のように小さくするのにともなって、作用の中のある項が

$$\int d^D \mathcal{M}_i \longrightarrow s^m \int d^D \mathcal{M}_i \quad (2.28)$$

とスケールしたとしよう。このとき、この項のスケールリングは s^m であるということにする。たとえば、(2.16) の項は

$$\int d^D x g_i(\Lambda) \mathcal{O}_i \longrightarrow s^{\delta_i - D} \int d^D x g_i(\Lambda) \mathcal{O}_i \quad (2.29)$$

とスケールするので、この項のスケールリングは $s^{\delta_i - D}$ であると言える。各項のレレバンスに関する議論は、 s のべき乗を用いてそのまま再現できる。

2.5 オーダーの原則

さて、ここまでの議論で、カットオフ Λ の存在を出発点として場の量子論の相互作用を一般的に議論してきた。現代的な理解では、カットオフ Λ は、運動量積分が到達する地点ではなく、場の量子論が定義される地点にほかならない。

このとき、場の量子論が定義されるのに必要な要素は、時空の次元 D と場 φ の種類、カットオフ Λ 、そして対称性である。上で議論したように、一般に Λ で定義された理論

$$S_\Lambda = \int d^D x \sum_i \frac{\lambda_i(\Lambda)}{\Lambda^{\delta_i - D}} \mathcal{O}_i \quad (2.30)$$

は、課された対称性によって許されるすべての（一般には無限個の）項を含む。これら無限個の結合定数 $\{\lambda_i(\Lambda)\}$ は、すべて $\mathcal{O}(1)$ で出現すると仮定した。

ここで、「各 λ_i のオーダーが $\mathcal{O}(1)$ である」というのは、非自明で本質的な仮定である。これは、

禁止される特別な理由のない相互作用はすべて許され、同じオーダーで物理に寄与する

という原則に基づく期待である。ここでいう「特別な理由」とは、特定の相互作用を禁止したり、係数の取る値が制限されたりする機構（対称性の破れや選択則、トポロジーなど）のことである。こうした制約が無い限りは、(2.30) では、許される項が最大エントロピー的に（もっともランダムになるように）すべて同じオーダーで出現するのが妥当だと考える。

これは逆に「 $\lambda_i(\Lambda)$ が極端に大きい（あるいは極端に小さい）値を取るときには、なぜそうなるのかを説明する理由が必要である」ということの言い換えでもある。端的に言えば、

特別なことが起こるのには必ず理由があり、理由がなければ特別なことは起こらない

と標語的に言い表してもよい。今の文脈に当てはめれば、理論を特徴づけるエネルギースケールが Λ であるから、「特別なこと」が起こらないときには $\lambda_i(\Lambda) = g_i(\Lambda) \Lambda^{\delta_i - D} \sim \mathcal{O}(1)$ である、ということになる。

低エネルギー領域 $E \ll \Lambda$ でくりこみ不可能な相互作用はほとんど無視できたのとは対照的に、 Λ 程度のエネルギースケールでは、対称性から許されるすべての項の寄与が同程度となり、パラメータは無限個になって理論は予言能力を失う。したがって、この時点で理論 $S_\Lambda[\varphi]$ は破綻する。

しかし、このことを逆手に取れば、くりこみ不可能な相互作用からカットオフ Λ がおおむねどのあたりのエネルギースケールにあるかを知ることができる。

たとえば、理論 $S_\Lambda[\varphi]$ で、エネルギー E の散乱過程においてくりこみ不可能 ($\delta_i > D$) な相互作用の結合定数 $g_i(\Lambda)$ を知ることができたでしょう。散乱過程へのこの項の寄与は

$$g_i(\Lambda) E^{\delta_i - D} \quad (2.31)$$

程度であるので、カットオフよりも十分小さいエネルギースケール $E \ll \Lambda$ ではほとんど効かないが、 E の増加にしたがって増大する。 $\lambda_i(\Lambda) = g_i(\Lambda) \Lambda^{\delta_i - D} \sim \mathcal{O}(1)$ であることを使うと、カットオフはおおむね

$$\Lambda \sim \mathcal{O}\left(g_i(\Lambda)^{1/(\delta_i - D)}\right) \quad (2.32)$$

程度のエネルギースケールにあると分かる。だから、くりこみ不可能な相互作用は、高エネルギー側の情報を含んでいる、とすることができる。もし本当にくりこみ不可能な相互作用が見つければ、上の議論から、その理論による記述が妥当となるエネルギースケールの上限（あるいは、何らかの高エネルギー側の物理の情報）が分かることになり、それは喜ばしいことである。

2.6 自然さ (naturalness) の原則とファイン・チューニング

逆に、むしろ問題を引き起こすのは、レバントな（超くりこみ可能な）相互作用の方である。あるクラスのレバントな相互作用を考えると、 $\lambda_i(\Lambda) \sim \mathcal{O}(1)$ という原則を修正する必要性が生じる。

このことを見るために、 D 次元ボゾンの理論の質量項

$$S_\Lambda[\phi] \supset \int d^D x g(\Lambda) \phi^2 \quad (2.33)$$

を具体例として考えてみよう。運動項 $\int d^D x (\partial_0 \phi)^2$ から質量次元 $[\phi^2] = D - 2$ がしたがって、これより $[g] = 2$ が分かる。すなわち、この相互作用はレレバントである。

無次元化して $g(\Lambda) = \lambda(\Lambda) \Lambda^2$ とすると、エネルギー E の過程で

$$\int d^D x g(\Lambda) \phi^2 \sim \lambda(\Lambda) \left(\frac{E}{\Lambda} \right)^{-2} \quad (2.34)$$

とスケールし、 $\lambda(\Lambda)$ のオーダーは $\mathcal{O}(1)$ である。上で議論した通り、 $\lambda(\Lambda)$ が極端に小さい値を取るためには特別な機構が起こっていないとてはならない。もし $\lambda(\Lambda)$ を小さくするような機構が無いとすると、 $\lambda(\Lambda) = \mathcal{O}(1)$ なので $g(\Lambda) \sim \mathcal{O}(\Lambda^2)$ である。

しかし、ここで矛盾が生じる。 $g(\Lambda) \sim \Lambda^2$ ということは、すなわち場の質量がカットオフ Λ のスケールということになり、低エネルギー $E < \Lambda$ の理論からはデカップルしてしまう。すなわち、 ϕ の励起そのものが $E < \Lambda$ の理論のスペクトラムにはまったく現れないことになる。これは、「 D 次元ボゾンの理論」なるもの自体が存在しえない、ということの意味する。この結論は奇妙である。

したがって、場の質量項は、(2.13) の項としては存在してはならない。すなわち、対称性によって質量項が初めから禁止されている、と考えるのがこの矛盾を回避する一つの方法である。そこで一般の場の量子論に対して

すべての可能な質量項は、何らかの対称性を破っていないなければならない

という新たな条件を課そう。

いくつか具体例を見てみよう。ゲージ場の質量項 $M^2 a_\mu a^\mu$ はゲージ対称性を破っている。また、フェルミオンの質量項 $M \bar{\psi} \psi$ はカイラル対称性を破っており、ボゾンの質量項 $M^2 \phi^2$ は南部・ゴールドストーンの定理ないし超対称性から禁止される。これらの質量項はそれぞれ理論に課した対称性を破っており、したがって質量は自動的にゼロになる。この場合、上で指摘したような矛盾は生じない。

しかし、現実には質量をもつ場は存在し、たとえばクォークのカイラル対称性は近似的にのみ成り立つ。このとき、理論全体はカイラル対称性を保っていない。そこで、代わりに、クォークの質量項は（理論が要求するよりも大きい対称性である）カイラル対称性を破っているので、質量が小さくても（ゼロに近くても）おかしくはない、と考えてみよう。

このことは、カットオフ Λ でのパラメータ $\{\lambda_i(\Lambda)\}$ を決める際の方針として一般化することができる。つまり、パラメータ $\lambda_i(\Lambda)$ をオーダー $\mathcal{O}(1)$ よりも極端に小さく取るときには、その項が何らかの（理論に課されているよりも大きい）対称性を破っていないなければならない。このことは、あるパラメータ $\lambda_i(\Lambda)$ をゼロに取ったときに対称性が拡大する場合に限り、 $\lambda_i(\Lambda)$ を小さく取ってもよい、とも言い換えられる。

この方針を場の量子論における**自然さ (naturalness) の原則** [Hooft, 1980] と呼び、これを満たす場の量子論は**自然である**（そうでなければ、**不自然である**）という。すなわち、

場の量子論は、自然でなければならない

というのが、場の量子論を定義する際の基本方針である。

理論のパラメータに対する自然さの原則は、以下のようにまとめられる。

では、素粒子の標準模型は自然だろうか？ 答えは、**ノー**である。

実際、ヒッグス場 $H(x)$ の質量項はどんな対称性からも禁止されず、ゼロにおいて対称性もは存在しない（古典的なスケール対称性は量子異常で破れる）。したがって、観測値 $m_H \simeq 125 \text{ GeV}$ を、本来カットオフの

	ゼロにおくと対称性が拡大	ゼロにおいても対称性は不変
大きさが $\mathcal{O}(1)$	自然	自然
大きさが $\mathcal{O}(1)$ より極端に小さい	自然	不自然

スケールにあるはずの量として整合的に得るためには、本来 $\mathcal{O}(1)$ であるべき量を著しく小さく設定しなくてはならない。このように、つじつまを合わせるために本来 $\mathcal{O}(1)$ であるような量を著しく小さく（あるいは大きく）取ることを、**ファイン・チューニング (fine tuning)** と呼ぶが、これは人工的な処方であり、自然界の理論が人の手によるファイン・チューニングを必要とすることは、奇妙である。これを解決するために、複合ヒッグス模型や超対称性などいくつかの提案がなされているが、新理論として実験的に支持されているものはなく、依然として未解決の問題である。

ちなみに、素粒子の標準模型には、もう一つレバントな演算子がある。それは、恒等演算子 1 である。重力場と結合させると、この演算子は宇宙定数

$$S_\Lambda \supset \int d^4x \sqrt{-g} \rho_\Lambda \quad (2.35)$$

に相当する。 ρ_Λ は質量次元 4 をもち、次元解析では $D - \delta_i = 4$ の結合定数に対応するため、4 次元のレバント演算子の中で最もレバントである。観測値 $\rho_\Lambda^{\text{obs}} \sim (10^{-3} \text{ eV})^4$ をプランクスケール M_{Pl}^4 と比べると、必要なファイン・チューニングは $\sim 10^{-120}$ にも達し、ヒッグス質量問題 ($\sim 10^{-32}$) よりもはるかに深刻である。これもまた未解決問題である。

3 フェルミ液体のランダウ理論とくりこみ群

さて、くりこみについての一般論を適用する具体例として、フェルミ液体を考えよう。

3.1 はじめに：フェルミ液体

クーロン相互作用をする電子の典型的なエネルギースケールは、伝導バンドのバンド幅で特徴づけられ、おおむね $\Lambda \sim 1$ から 10 eV 程度である。冒頭で述べたように、フェルミ液体のランダウ理論は、 Λ では強く相互作用している電子系が低エネルギーでは自由なフェルミ液体として扱えることを主張する。これは、相互作用のくりこみの結果、自由フェルミ液体のパラメータの中に高エネルギー側の相互作用の情報がすべて有効的に押し込まれるということの意味する。

この描像は、たとえば BCS 理論の出発点を正当化している。BCS 理論では、電子同士がフォノンを介して引力相互作用をしクーパー対を作ると考えるが、この「電子」が文字通りの意味だとすると奇妙である。クーパー対の典型的な大きさは 10^4 \AA 程度であり、したがってこの軌道には 10^{10} 個のオーダーで電子が含まれている。フォノンによる引力相互作用はたかだか 10^{-3} eV 程度にすぎないなので、電子のクーロン相互作用が無視できるはずはない。それでも、クーロン相互作用を無視した BCS 理論が定性的にも定量的に正しい結果を与えているのは、BCS 理論の扱っている「電子」が実は裸の電子ではなく、相互作用がくりこまれた（ランダウ理論の意味での）準粒子だからという理由にほかならない。無視したように見えるクーロン相互作用は、電子の「衣」の中に押し込まれているのである。

以下では、裸の電子がクーロン相互作用をするエネルギースケール Λ をカットオフとし、それよりも十分小さい $E \ll \Lambda$ での記述を考える。

低エネルギーでの励起が電子と同じ量子数を持った自由な準粒子（以下では、単に『電子』と呼ぶ）で記述されると仮定し、この仮定が本当に妥当かを見ていこう。

3.2 フェルミ面上のスケーリング則

まず、低エネルギーでの理論が自由な電子であると仮定したので、作用を

$$S = \int dt d^3\mathbf{p} [\psi_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger i\partial_0 \psi_{\mathbf{p},\sigma} - (\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_F) \psi_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger \psi_{\mathbf{p},\sigma}] \quad (3.1)$$

と書く。 σ はスピンの添え字、 ϵ_F はフェルミエネルギーである。 $\epsilon_{\mathbf{p}}$ については特殊な形を仮定しない。この理論の基底状態はフェルミの海

$$|\text{FS}\rangle = \prod_{\sigma, \epsilon_{\mathbf{p}} \leq \epsilon_F} \psi_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger |0\rangle \quad (3.2)$$

であり、低エネルギーでの励起は粒子または正孔

$$|\text{粒子}(\mathbf{p}, \sigma)\rangle = \psi_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger |\text{FS}\rangle \quad (\epsilon_{\mathbf{p}} > \epsilon_F), \quad |\text{正孔}(\mathbf{p}, \sigma)\rangle = \psi_{\mathbf{p},\sigma} |\text{FS}\rangle \quad (\epsilon_{\mathbf{p}} < \epsilon_F) \quad (3.3)$$

である。

さて、くりこみ群を議論するためには、スケール変換

$$\Lambda \longrightarrow s\Lambda \quad (s < 1) \quad (3.4)$$

のもとで、フェルミ面がある場合に場がどう変換するかを考えればよい。

相対論的な場の量子論では、(3.4)のもとで運動量もともに同様に変換するが、フェルミ面があるときには注意が必要である。励起がフェルミ面上でのみ生じることから、エネルギースケール Λ を0まで移動させるにしたがって、運動量はフェルミ面に向かって縮小していく。このことは、励起をすべて積分したときゼロ温度でフェルミ面だけが残ることからも物理的に妥当である。すなわち、運動量 \mathbf{p} をフェルミ面上のベクトル \mathbf{k} とフェルミ面に垂直なベクトル \mathbf{l} に

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} + \mathbf{l} \quad (3.5)$$

と分けたとき、スケール変換(3.4)のもとでそれぞれのベクトルは $\mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{k}, \mathbf{l} \longrightarrow s\mathbf{l}$ と変換する。ここで、フェルミ速度 $\mathbf{v}_F = \partial_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}}$ を用いて、分散関係を

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = \epsilon_F + \mathbf{l} \cdot \mathbf{v}_F(\mathbf{k}) + \mathcal{O}(l^2) = \epsilon_F + lv_F(\mathbf{k}) + \mathcal{O}(l^2) \quad (3.6)$$

のようにフェルミ面近傍で展開すると、(3.1)は

$$S = \int dt d^2\mathbf{k} d\mathbf{l} [\psi_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger i\partial_0 \psi_{\mathbf{p},\sigma} - lv_F(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger \psi_{\mathbf{p},\sigma}] \quad (3.7)$$

のように書き換えられる。ここで、 $\int d^2\mathbf{k}$ の面積分はフェルミ面上で、 $\int d\mathbf{l}$ の積分はフェルミ面に垂直な軸に沿って行う。この上で、対応するスケール変換

$$dt \longrightarrow s^{-1}dt, \quad d\mathbf{k} \longrightarrow d\mathbf{k}, \quad d\mathbf{l} \longrightarrow s d\mathbf{l}, \quad \partial_0 \longrightarrow s\partial_0, \quad \mathbf{l} \longrightarrow s\mathbf{l} \quad (3.8)$$

を行ったときの変換性を考えると、(3.7)の各項は $s^1 \times (\psi^\dagger \psi)$ のスケーリングでスケールすることが分かる。このことと作用全体がスケール不変であることから、 ψ のスケーリングは

$$\psi \longrightarrow s^{-1/2}\psi \quad (3.9)$$

である。

3.3 演算子のレlevance

さて、フェルミ面があるときのスケール則が分かったので、これをもとに仮定した理論を検証しよう。

理論 (3.1) が低エネルギーの物理を正しく記述しているためには、対称性から許されるすべての項が (3.4) のスケールのもとでイレlevanceでなくてはならない。言い換えれば、理論 (3.1) がくりこみ群変換 (3.4) で不変な赤外固定点になっていることが要請される。もしレlevanceな項が存在すれば、理論 (3.1) は取り込むべき相互作用を取り入れていないことになって破綻する。

ラグランジアンが満たすべき対称性は、(1) 粒子数保存を与える U(1) 対称性、(2) 運動量保存を与える並進対称性^{*9}、(3) スピンの保存を与える SU(2) 対称性、の3つである。

まず初めに、質量項に似た2次項

$$\int dt d^2\mathbf{k} d\mathbf{l} \mu_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{p},\sigma}^\dagger \psi_{\mathbf{p},\sigma} \quad (3.10)$$

を考える。スケール (3.4) のもとでこの項は s^{-1} でスケールするので、レlevanceである。しかし、この項は $\epsilon_{\mathbf{p}}$ の再定義 $\epsilon'_{\mathbf{p}} = \epsilon_{\mathbf{p}} + \mu_{\mathbf{k}}$ に含めることができるので、問題にはならない。この再定義はフェルミ面の形を変え、フェルミ速度の表式を変える。したがって、低エネルギーでフェルミ面が存在すること自体は仮定してよいが、対称性からフェルミ面の形状に制約を課することはできない。

次に、4次項

$$\int dt \left(\prod_{i=1,\dots,4} d^2\mathbf{k}_i d\mathbf{l}_i \right) V(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \psi_{\mathbf{p}_1,\sigma}^\dagger \psi_{\mathbf{p}_2,\sigma}^\dagger \psi_{\mathbf{p}_3,\sigma'} \psi_{\mathbf{p}_4,\sigma'} \quad (3.11)$$

を考えよう。この項は $s^1 \times (\delta(\mathbf{p}_1 + \dots))$ のスケール (3.4) でスケールする。ここで、0 に向かってスケールする l が \mathbf{k} より十分小さいとみなして

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) &= \delta\left((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) + (\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_3 - \mathbf{l}_4)\right) \\ &\simeq \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \end{aligned} \quad (3.12)$$

とすると、このスケールは s^0 である。したがって、(3.11) は s^1 でスケールするイレlevanceな項であることになる。

また、これ以上の相互作用はすべてイレlevanceになるので、低エネルギーで自由フェルミオンとして扱った初めの仮定とコンシステントである。

3.4 フォノンの寄与

さて、次に、フォノンの寄与がフェルミ液体に対してイレlevanceであるかどうかを検証しよう。

定常点からの正イオンの変位を $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_i(\mathbf{x}))$ (そのフーリエ変換を $u_{i,\mathbf{q}}$) とし、ポテンシャルを Δ_{ij} として作用

$$\begin{aligned} S_{\text{phonon}} &= \int dt d^3\mathbf{q} \left[\frac{1}{2} M \partial_0 u_{i,\mathbf{q}} \partial_0 u_{i,-\mathbf{q}} - \frac{1}{2} u_{i,\mathbf{q}} \Delta_{ij,\mathbf{q}} u_{i,-\mathbf{q}} \right] \\ &\equiv \frac{1}{2} \int dt d^3\mathbf{q} \left[\partial_0 D_{i,\mathbf{q}} \partial_0 D_{i,-\mathbf{q}} - \frac{1}{M} D_{i,\mathbf{q}} \Delta_{ij,\mathbf{q}} D_{i,-\mathbf{q}} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

^{*9} 正確には、格子ポテンシャルがある系では離散並進対称性を課すだけで十分である。このとき運動量空間はブリルアンゾーン $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ にコンパクト化されるので、格子ポテンシャルからの運動量移行を法とした mod でのみ運動量が保存される。そのため、たとえば Umklapp 散乱に対応する項 $\psi_{\mathbf{p}+\mathbf{K}_i}^\dagger \psi_{\mathbf{p}}$ なども許される。あるいは、結晶点群の対称性を課してもよい。しかし、これらの対称性を考慮したとしても、以下のくりこみ群の解析は変更なく成立する。そこで、以下では連続的な並進対称性 (すなわち、厳密な運動量保存) を課して議論を進めることにする。

を考える。2行目では $\mathbf{D}_q = M^{1/2} \mathbf{u}_q$ と再定義した。

これをもとに、まずフォノンのスケーリング則を考える。フォノンはフェルミ面近傍の励起と結合するので、典型的なフォノンの運動量 \mathbf{q} は、スケーリング (3.4) で有限のフェルミ面上の異なる点を結ぶベクトルに収束していく。したがって、フォノンの運動量 \mathbf{q} は s^0 でスケールする。

ポテンシャル項は $1/M$ に比例するので、特に小さいエネルギースケール (後述) 以外では、運動項が卓越する。そこで、2.4節で議論したように、スケーリングは運動項がマージナルになるように決めるのが妥当である。このことを踏まえて運動項を見ると、フォノン \mathbf{D}_q のスケーリング則

$$\mathbf{D}_q \longrightarrow s^{-1/2} \mathbf{D}_q \quad (3.14)$$

が導ける。このことから、ポテンシャル項は s^{-2} でスケールし、レバントとなることが分かる。

電子とフォノンが結合した系は、特徴的なエネルギースケールが2つ共存するような系である。このとき、エネルギースケール $E < \Lambda$ でのポテンシャル項の寄与はおおむね

$$\lambda(E) = \lambda(\Lambda) \left(\frac{E}{\Lambda} \right)^{-2} \quad (3.15)$$

程度のオーダーになる。ここで、 $\lambda(\Lambda)$ は Λ での特徴的なスケールで M を無次元化したパラメータであり、 Λ では裸の電子のダイナミクスが支配的であることから $\lambda(\Lambda) = m/M$ とできる。

このパラメータが低エネルギーで運動項と同じオーダー $\mathcal{O}(1)$ の寄与を与えるようなエネルギースケールを考えると、

$$1 \sim \frac{m}{M} \left(\frac{E_D}{\Lambda} \right)^{-2} \quad \text{すなわち} \quad E_D \sim \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \Lambda \quad (3.16)$$

と分かる。 E_D はフォノンの典型的なエネルギースケールであり、**デバイ (Debye) エネルギー**にほかならない。 E_D は (3.13) で質量項の役割を果たすので、2.6節での議論と同様に、 E_D 以下のエネルギースケールではスペクトラムからデカップルする。

次に、フォノンと電子の結合

$$S_{\text{int}} = \int dt d^3\mathbf{q} \left(\prod_{i=1,2} d^2\mathbf{k}_i d\mathbf{l}_i \right) \frac{1}{M^{1/2}} g_i(\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) D_{i,\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{p}_1,\sigma}^\dagger \psi_{\mathbf{p}_2,\sigma} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}) \quad (3.17)$$

を考えよう。デルタ関数を前節と同様に扱おうと (より精密には後述) この項は $s^{-1/2}$ でスケールするので、レバントである。フォノンがデカップルするデバイエネルギー E_D では、結合定数は Λ でのスケールに比べて

$$\left(\frac{E_D}{\Lambda} \right)^{-1/2} = \left(\frac{m}{M} \right)^{-1/4} \quad (3.18)$$

だけ大きい。ただし、この項には $M^{-1/2}$ が含まれており、 Λ でのスケールで無次元化すると $(m/M)^{1/2}$ となるので、 E_D では全体の寄与は

$$\left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{M} \right)^{-1/4} = \left(\frac{m}{M} \right)^{1/4} \quad (3.19)$$

程度になり結合は抑制される。

さらに、(フォノンがスペクトラムからデカップルする) E_D 以下のエネルギースケールでのふるまいは以下のように分かる。 E_D 以下のエネルギースケールでは、ポテンシャル項が運動項よりも卓越する。したがって、2.4節で議論したように、今度はポテンシャル項がマージナルになるようにスケーリングを決める。その結果、 $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ は $s^{1/2}$ のスケーリングを持ち、電子・フォノン結合 (3.17) も $s^{1/2}$ のスケーリングを持つことになる。したがって、電子・フォノン結合は**デバイエネルギー以下ではイレバント**である、と言える*10。

*10 あるいは、フォノンを積分して有効的に4点相互作用として扱うこともできる。4点相互作用はイレバントだったので、フォノンの寄与を加えてもイレバントであり、低エネルギーでの自由フェルミ液体の描像は崩壊しない。

以上の議論から、電子・フォノン結合はデバイエネルギー E_D 程度のオーダーで $(m/M)^{1/4}$ 程度の大きさを持ち、これをピークにして低エネルギー側では減少していくことが分かった。

3.5 運動量デルタ関数とミグダルの定理

ここまで見てきたように、もし本当にすべての相互作用がイレバントなのだとしたら、超伝導を生じさせるクーパー不安定性の起源が行方不明になってしまう。

実は、(3.11) でのデルタ関数の扱いはやや素朴すぎる。これをより精密に扱うと、低エネルギーでの物理に量子補正が加わる余地が生じる。

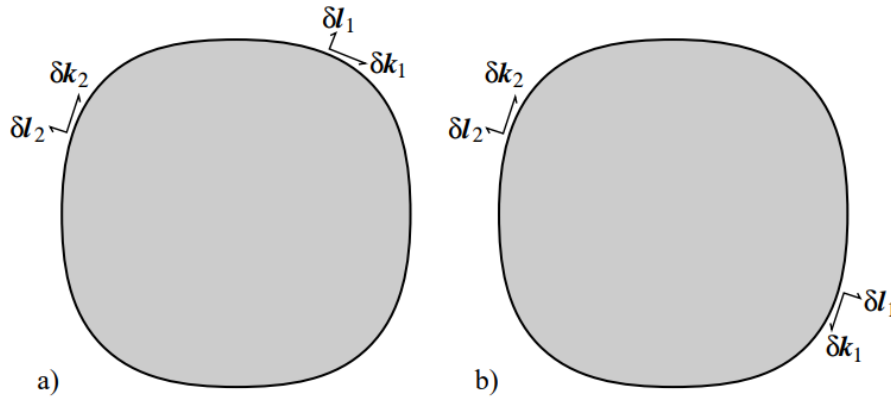
そこで、運動量 $\mathbf{p}_{1,2}$ の電子が $\mathbf{p}_{3,4}$ に散乱される過程を考える。ここで、運動量の変化を

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 + \delta\mathbf{k}_1 + \delta\mathbf{l}_1, \quad \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_2 + \delta\mathbf{k}_2 + \delta\mathbf{l}_2 \quad (3.20)$$

と、フェルミ面に垂直な成分と平行な成分に分解する。このとき、(3.11) のデルタ関数は

$$\delta^d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) = \delta^d(\delta\mathbf{k}_1 + \delta\mathbf{k}_2 + \delta\mathbf{l}_1 + \delta\mathbf{l}_2) \quad (3.21)$$

と書ける。ただし、 d を空間の次元とした。



上の図に示すように、一般の散乱チャンネル (a) では、 $\delta\mathbf{k}_1$ と $\delta\mathbf{k}_2$ は線形独立なので、 $\delta\mathbf{k}_1 + \delta\mathbf{k}_2$ は運動量変化のオーダーのノルムを持つベクトルである。したがって、これに比べて $\delta\mathbf{l}_1 + \delta\mathbf{l}_2$ は無視でき、デルタ関数は $\delta^d(\delta\mathbf{k}_1 + \delta\mathbf{k}_2)$ となってスケリングは単に s^0 で与えられる。図で示したのは空間 $d = 2$ 次元の場合だが、一般次元でも同様である。その結果、上でのデルタ関数の素朴な扱いには修正が加わらず、(3.11) は依然イレバントである。

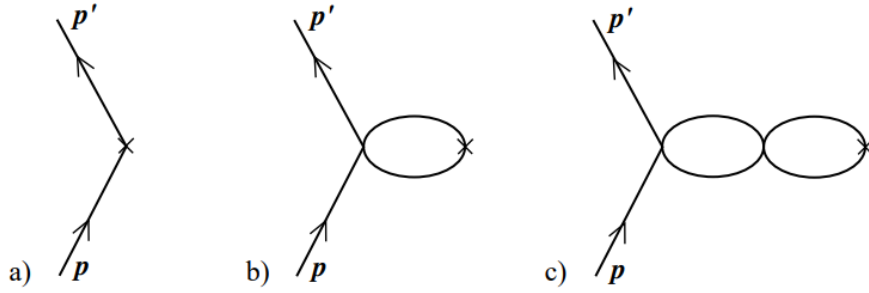
一方、散乱する電子の合計運動量がゼロの場合 ($\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$)、この議論は必ずしも正しくない。(b) のようにフェルミ面がパリティ対称だとすると、デルタ関数 $\delta^d(\delta\mathbf{k}_1 + \delta\mathbf{k}_2)$ の引数はフェルミ面に垂直な方向でゼロになる。すなわち、 $\delta\mathbf{l}_1 + \delta\mathbf{l}_2$ はこの方向についてのみ無視できないことになり、 $\delta^d(\delta\mathbf{k}_1 + \delta\mathbf{k}_2)$ は $\delta(\delta\mathbf{l}_1 + \delta\mathbf{l}_2)$ のような因子を一つだけ含む。この因子は s^{-1} でスケールするので、(3.11) のスケリングは s^{-1} だけ変わり、これはマージナルになる。

この議論は一般の4点の接触相互作用に拡張でき、

2本の外線の運動量の合計がゼロになるような4点相互作用は、フェルミ面上でマージナルである

という原則が導ける。これ以外の4点相互作用は、イレバントである。

マージナルな相互作用が存在することで、フェルミ液体の描像は大きく変わる。例として、フェルミ面上の運動量 \mathbf{p} から \mathbf{p}' への散乱チャンネルの遷移振幅を考えよう。Tree-level での寄与は下の図 (a) で与えられ、2点頂点関数への量子補正として (b)、(c) のような項が加わる。



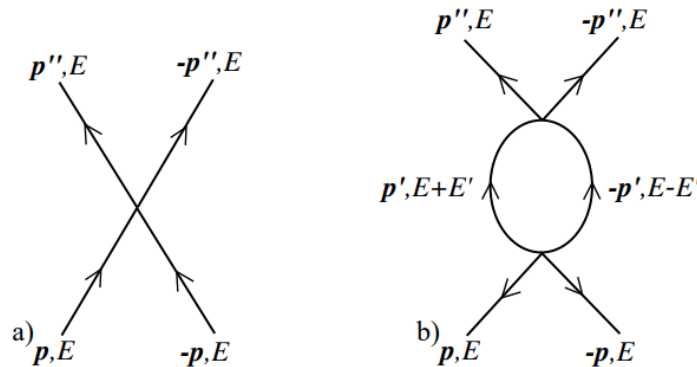
\mathbf{p} と \mathbf{p}' の差がフェルミ面上で有限だとすると、量子補正はイレバントであり小さい。一方、 $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ となるときには、上の原則から、(b) や (c) に含まれるようなダイアグラムの頂点はマージナルで。有限の寄与をする。したがって、これらの量子補正はフェルミ面上で無視できない。(b)、(c) のようなダイアグラムはどこまででも続けていくことができ、これらはすべて有限の寄与をすることから、量子補正をすべて取り込んだ2点頂点関数はこれらの無限等比級数の形で書ける。これはフェルミ液体のランダウ理論の描像（「電子のカレントは相互作用によって有限の補正を受ける」）にほかならない。

一方、同様の議論は電子・電子・フォノンの頂点についての適用できる。ただし、上で見たように、フォノン典型的には有限の運動量を運ぶので $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'$ である。したがって頂点関数への補正は常に小さく、tree-level のダイアグラム (a) だけが寄与することが分かる。この「電子・電子・フォノンの頂点関数への補正は、フェルミ面上で無視できる」という主張は、物性理論で言うところのミグダル (Migdal) の定理にほかならない^{*11}。

3.6 マージナルな相互作用と高温超伝導

ここまでの議論で、2本の外線運動量の和がゼロに制約されているときは、4点相互作用がマージナルになることが分かった。前章で見たように、相互作用がマージナルなどときには、最低次の量子補正がそのレバンスを決めるのだった。

そこで、マージナルな（すなわち、入射運動量が \mathbf{p} および $-\mathbf{p}$ の）4点フェルミ相互作用に対する量子補正を考えてみよう。このとき、4点相互作用への量子補正は、以下のダイアグラムで与えられる。



簡単のため、 $V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ が定数 V だとすると、最低次の量子補正 (b) の寄与は

$$V^2 \int \frac{dE' d^2 \mathbf{k}' dl'}{(2\pi)^4} \frac{1}{(1+i\epsilon)(E+E') - v_F(\mathbf{k}')l'} \frac{1}{(1+i\epsilon)(E-E') - v_F(\mathbf{k}')l'} \quad (3.22)$$

^{*11} ただし、空間次元が $d = 1$ のときには、運動量はすべて同じ方向を向いているので、この議論は正しくない。 $d = 1$ のときには、端的にはそもそも \mathbf{k} がなく l だけになるので、すべての頂点がマージナルになる。したがって、Migdal の定理は成り立たず、頂点関数への量子補正を真面目に考慮しなくてはならない。

のように書ける。このループ積分のうち、特に \ln で発散する部分に興味があるので、この積分をオーダーで評価すると、おおむね

$$V(E) = V - V^2 N \left[\ln \left(\frac{\Lambda}{E} \right) + \mathcal{O}(1) \right] + \mathcal{O}(V^3) \quad (3.23)$$

程度になる。ここで、フェルミ面上での状態密度

$$N \equiv \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{v_F(\mathbf{k}')} \quad (3.24)$$

を用いた。

この評価を用いて結合定数 $V(E)$ のベータ関数を計算すると、

$$\beta(V) = E \frac{\partial V(E)}{\partial E} = NV(E)^2 + \mathcal{O}(V(E)^3) \quad (3.25)$$

となり、これを解いて

$$V(E) = \frac{V}{1 + NV \ln(\Lambda/E)} \quad (3.26)$$

を得る。ただし、 $V \equiv V(\Lambda)$ とした。この結果から、斥力相互作用 ($V > 0$) は低エネルギーで弱くなっていくが、引力相互作用 ($V < 0$) は低エネルギーで強くなっていくことが分かる。

この結果は何を意味するだろうか？

たとえば、カットオフ Λ で、電子の 4 点相互作用（物理的には、遮蔽されたクーロン相互作用）と電子・電子・フォノン結合の結合定数がそれぞれ V_C と g であったとしよう。簡単のため、相互作用の運動量依存性はふたたび無視することにする。

カットオフ Λ とデバイエネルギー E_D での結合定数をそれぞれ、 $\mu = NV_C$ 、 $\mu^* = NV_C(E_D)$ とすると、上の議論から

$$\mu^* = \frac{\mu}{1 + (\mu/2) \ln(M/m)} \quad (3.27)$$

が導ける。一方、ミグダルの定理から、 g への量子補正はイレレバントなので無視できる。

デバイエネルギー E_D では、無次元化された g はオーダー $\mathcal{O}(1)$ なので、これを積分すると 4 点相互作用にオーダー $\mathcal{O}(1)$ の寄与 V_p をする。 $-\lambda = NV_p$ とすると、 E_D より少し下のエネルギースケール $E_D - dE$ では、合計の 4 点相互作用は

$$NV(E_D - dE) = \mu^* - \lambda \quad (3.28)$$

で与えられることになる。

もしも $\mu^* - \lambda > 0$ だとすると、これ低エネルギーで小さくなるのでそれほど面白くない。しかし、 $\mu^* - \lambda < 0$ であれば、これは低エネルギーで増大することになり、(2.22) での議論と同様に、

$$E_c \equiv E_D e^{-1/(\mu^* - \lambda)} = \Lambda \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} e^{-1/(\mu^* - \lambda)} \quad (3.29)$$

において発散する。結合定数が発散すると、フェルミオンが強結合的になる。強く引力相互作用するギャップレスなフェルミオンは不安定であり、クーパー対が凝縮してスペクトラムにギャップが開く。これがクーパー不安定性の起源である。

これは、QCD におけるカイラル対称性の破れのシナリオに大変よく似ている。ただし、クーパー不安定性の場合には電子と電子が対になって凝縮するので、電磁気的な $U(1)$ 対称性が破れて超伝導が生じる。これは BCS 理論のシナリオにほかならない。

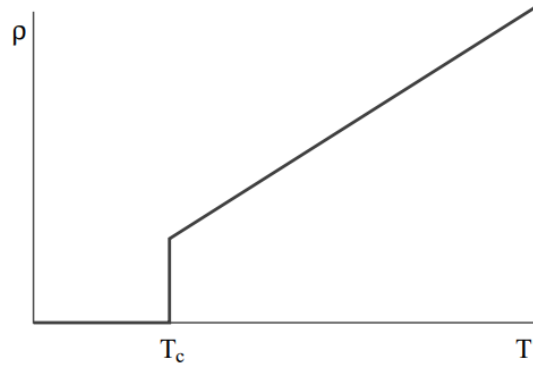
3.7 高温超伝導との関係

最後に、高温超伝導との関係を議論しよう。

典型的にな高温超伝導体では、超伝導転移点 T_c 近傍で、抵抗率 $\rho(T)$ が T の 1 次で落ちる

$$\rho(T) \sim A + BT \quad (3.30)$$

ことが観測されている。



一方、通常の超伝導体では、典型的には温度の 5 次

$$\rho(T) \sim A + CT^5 \quad (3.31)$$

である。

電子系が低エネルギーでフェルミ液体として扱えることを踏まえれば、抵抗率にそれぞれ何が寄与をしているかを考えることができる。たとえば、 $O(T^0)$ の寄与と $O(T^5)$ の寄与は、それぞれ不純物散乱とフォノン散乱からの寄与である。

では、 $O(T)$ の寄与はどこから来たのだろうか？実は、 $O(T)$ の寄与を与える相互作用は、ランダウ理論の枠組みの中には存在しない。すなわち、対称性を保つもっとも一般的なラグランジアンを書き下しても、このような寄与を抵抗率に与える相互作用は、どこにも見つからない。

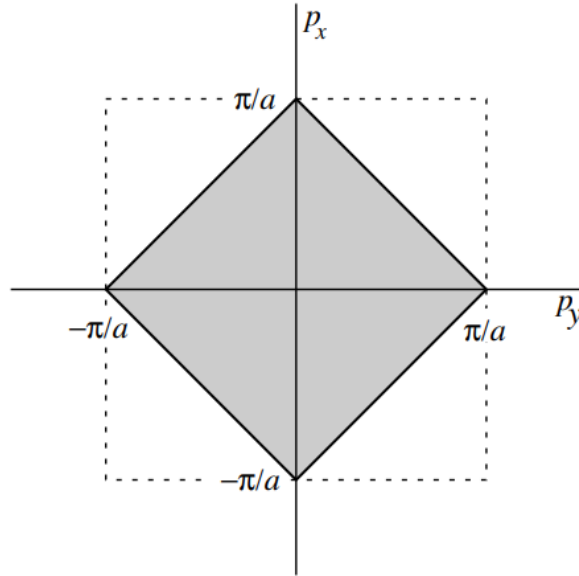
より正確に言えば、一般的なフェルミ液体のセットアップでこのような寄与が無いだけで、特殊な仮定をすれば $O(T)$ の寄与が生じる余地はある。たとえば、フェルミ面に特異性があるような場合である。具体的には、最近接ホッピング t だけが入った正方格子上の強束縛模型を考えると、分散関係は

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = -t[\cos(p_x a) + \cos(p_y a)] \quad (3.32)$$

となり、半充填 ($\nu = 1/2$, $\epsilon_F = 0$) でフェルミ面は以下ようになる。

このフェルミ面は正方形の頂点の部分で特異になっていて、フェルミ速度がゼロになる ($v_F = 0$)。これはファン・ホーベ (van Hove) 特異点と呼ばれ、この点では状態密度 (3.24) が対数発散して相互作用を誘起する。

また、このフェルミ面は、正方形の対辺が $(\pi/a, \pi/a)$ のベクトル分だけの平行移動で一致する (これをネスティング (nesting) という)。このときには、合計の運動量が $(\pi/a, \pi/a)$ となる電子・正孔対の間の相互作用が (運動量の和がゼロになるような電子の間の相互作用と同じく) マージナルになる。 V が正のときにはこれは引力相互作用になり、電子・正孔対の凝縮が起こる。その結果、 $\psi_{\sigma}^{\dagger} \psi_{\sigma}$ や $\psi_{\sigma}^{\dagger} \sigma_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'}$ などの演算子が運動量 $(\pi/a, \pi/a)$ を持って凝縮する。前者の凝縮は周期的に変化する電荷 (電荷密度波 (charge density wave; CDW)) を生じ、後者の凝縮は周期的に変化するスピン密度 (スピン密度波 (spin density wave; SDW)) を生じる。



このように、特殊なフェルミ面を念頭に置けば、低エネルギーでさまざまな相互作用を生じる効果が考えられ、高温超伝導体の $\mathcal{O}(T)$ のふるまいを説明できることが期待できる。

しかし、フェルミ面の特殊な形を仮定するのは妥当だろうか？フェルミ面の形状を変える相互作用 (3.10) は、上で見たようにレレバントである。したがって、低エネルギー側でフェルミ面に特定の幾何的構造を与えるためには、カットオフスケールでファイン・チューニングをしなくてはならない。これは、ヒッグス質量の問題によく似ている。

$\mathcal{O}(T)$ のふるまいは、100 K (~ 0.01 eV) 程度のオーダーまで持続することがあり^{*12}、これを説明するには 10^{-2} ないし 10^{-3} のオーダーのファイン・チューニングが必要である。しかし、もしファイン・チューニングが答えなのだとすると、高エネルギー側での摂動（物理的には、ドーピング）に対して極めて不安定なはずである。だが実際には、高温超伝導体での $\mathcal{O}(T)$ のふるまいは、5～10% のドーピングに対して安定であることが分かっている^{*13}。したがって、結局、高温超伝導体のふるまいをフェルミ面の幾何だけで説明するのは困難だという結論に至る。代わりに、低エネルギーでのこのふるまいを説明する（'t Hooft の意味で）自然な理論を探さなくてはならない。

参考文献

- J. Polchinski, “Effective field theory and the fermi surface,” *arXiv [hep-th]*, 8 Oct. 1992. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/hep-th/9210046>
- R. Shankar, “Renormalization-group approach to interacting fermions,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 66, no. 1, pp. 129–192, 1 Jan. 1994. [Online]. Available: <https://journals.aps.org/rmp/pdf/10.1103/RevModPhys.66.129>
- J. Polchinski, “Renormalization and effective lagrangians,” *Nucl. Phys. B.*, vol. 231, no. 2, pp. 269–295, 9 Jan. 1984. [Online]. Available: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(84\)90287-6](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(84)90287-6)
- K. Wilson, “The renormalization group and the ϵ expansion,” *Phys. Rep.*, vol. 12, no. 2, pp. 75–199, 1 Aug. 1974. [Online]. Available: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573\(74\)90023-4](http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(74)90023-4)
- K. G. Wilson, “Renormalization group and strong interactions,” *Phys. Rev. D Part. Fields*, vol. 3,

^{*12} たとえば Bi2201 などの物質では、伝導率は 700 K から 7 K くらいまでの広い範囲で温度に対して 1 次である。

^{*13} 電子の伝導バンド幅 (~ 2 eV) を考えると、これは 0.1 eV 程度のオーダーのフェルミ面のシフトに対応する。

no. 8, pp. 1818–1846, 15 Apr. 1971. [Online]. Available: <https://journals.aps.org/prd/pdf/10.1103/PhysRevD.3.1818>

G. t. Hooft, “Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking,” in *Recent Developments in Gauge Theories*. Springer US, 1980, pp. 135–157. [Online]. Available: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4684-7571-5_9